Квантование, классическая и квантовая теории поля и тэта-функции

А. Н. Тюрин

Москва
2003

Игорю Ростиславовичу Шафаревичу
к его 80-летию

Оглавление.

Глава 1
Процесс квантования

Глава 2
Алгебраические кривые = римановы поверхности

Глава 3
Неабелевы ϑ-функции

Глава 4
Симплектическая геометрия многообразия модулей векторных расслоений

Глава 5
WZW CQFT

Глава 6
Тривалентные графы

Глава 7
Аналитические аспекты теории неабелевых ϑ-функций

Глава 8
Отображение Бортвика – Пола – Урибе

Глава 9
Точки максимального вырождения

Введение.

Десять лет назад Арно Бовиль опубликовал обзор [9][1], где всего на 16 страницах дал полное и изящное введение в этот специфический раздел алгебраической геометрии. Сегодня нам потребуется гораздо больше бумаги, даже если предположить, что читатель уже знаком с [9], где связь обобщенных ϑ-функций с классическими и квантовыми конформными теориями поля тоже обсуждается.

В этой книге мы, следуя стратегии А. Бовиля, не приводим ни мотивировок, ни доказательств. Однако *все* необходимые *геометрические конструкции* будут представлены, а исходя из них, читатель уже легко сумеет отыскать (или угадать) доказательства сам. Таким образом, настоящий текст не является математической монографией, но лишь конспектом обширнейшего направления исследований[2].

В абелевом случае[3] фиксация дополнительных комбинаторных данных — так называемых ϑ-структур уровня k — доставляет специальные базисы в пространствах сечений тензорных степеней канонической поляризации якобиана, что позволяет представлять сечения голоморфными функциями на «абелевом пространстве Шоттки» $(\mathbb{C}^*)^g$ и писать замечательные явные аналитические формулы, широко использующиеся в $\text{У}_{\text{р}}^{\text{Ч}}\text{П}$, теории интегрируемых систем и классической механике (см. ссылки в [21]).

Нашей целью будет реализация подобной программы в неабелевом случае, что является практическим ответом на итоговый вопрос А. Бовиля (сформулированный в [9] под номером 9).

То, что уже сама *конструкция* ϑ-функций с характеристиками внутренним образом связана с процедурой квантования (квантовой теорией поля в размерности 1), отмечалось неоднократно.

---

[1] «Vector Bundles on Curves and Generalized Theta Functions: Recent Results and Open Problems»

[2] мы надеемся в будущем развернуть его в полноценную монографию «Векторные расслоения над алгебраическими кривыми» или, на принятом нынче в математических кругах сленге, «VBAC»

[3] изложенном в замечательных книгах [8], [15], [22], [81] и многих других

Оказалось, однако, что методы конформной теории поля (т. е. теории в размерности $2 = 1 + 1$) и стандартные физические соображения: симметрии, поля, уравнения, сшивка локальных лагранжианов и т. п. открывают новые переспективы и дают в руки столь эффективные вычислительные средства, о каких «алгебраические геометры и не мечтали» (А. Бовиль).

Глава 1.
ПРОЦЕСС КВАНТОВАНИЯ

§ 1 Конструкция.

Первый вопрос: что мы хотим квантовать? В геометрическом квантовании[1] — это симплектическое многообразие (M, ω) (фазовое пространство классической механической системы с конечным числом степеней свободы) или биалгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на M с операциями обычного (поточечного) умножения $f_1 \cdot f_2$ и *скобкой Пуассона*:

$$\{f_1, f_2\} = \omega(H_{f_1}, H_{f_2}) \ ,$$

где $H_f = \omega^{-1}(df)$ — это гамильтоново векторное поле, порожденное функцией $f \in C^\infty(M)$. Отметим, что условие $d\omega = 0$ влечет выполнение тождества Якоби для скобки Пуассона. Если M компактно, то абелева умножения на $C^\infty(M)$ достаточно для восстановления M, а из структуры алгебры Ли на $C^\infty(M)$ восстанавливается ω. Таким образом в компактном случае пара (M, ω) и биалгебра (наблюдаемых) $C^\infty(M)$ есть эквивалентные объекты.

BRST-предквантование — это попытка построить соответствие Q, сопоставляющее классическим объектам квантовые так, чтобы

- $Q(M) = \mathcal{H}$ было гильбертовым пространством (волновых функций);

[1] см., например, [32]

- $Q(f)$ для $f \in C^\infty(M)$ были бы самосопряженными операторами на $\mathcal{H}$;
- выполнялся бы *принцип соответствия* Дирака:
$$[Q(f_1), Q(f_2)] = i\hbar\, Q(\{f_1, f_2\}) \ ; \tag{1.1}$$
- возникающее таким образом представление пуассоновой алгебры $C^\infty(M)$ самосопряженными операторами на $\mathcal{H}$ было бы неприводимо.

Но, согласно теореме ван Хова, такая идеальная конструкция невозможна в принципе.

Два основных метода геометрического квантования опускают некоторые требования из приведенного выше списка: квантование Сурье - Костанта не дает неприводимого представления, а в квантовании Березина нарушается принцип соответствия, который будет выполнен лишь асимптотически.

Обе эти конструкции вводят в исходную классическую механическую систему одинаковые дополнительные *данные предквантования* — пару (L, ∇), состоящую из комплексного эрмитова линейного расслоения L (с фиксированной эрмитовой формой h) и унитарной связности ∇ на L с формой кривизны
$$F_\nabla = 2\pi i\, \omega \, . \tag{1.2}$$
Последнее требование накладывает сильное ограничение на исходную симплектическую структуру — оно означает, что класс когомологий симплектической формы является целочисленным:
$$[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z}). \tag{1.3}$$

Четверку (M, ω, L, ∇) можно квантовать, беря в качестве пространства волновых функций пространство глобальных сечений
$$\mathcal{H} = \Gamma^\infty(L) \ ,$$
снабженное эрмитовым скалярным произведением
$$\langle s, s' \rangle = \frac{1}{n!} \int_M h(s, s') \cdot \omega^{\wedge n} \ ,$$

где $n = \dim M/2$ (обычно пространство $\mathcal{H}$ пополняется по L^2-норме). Каждой функции $f \in C^\infty(M)$ (классической наблюдаемой) можно сопоставить оператор

$$Q(f) = i\hbar\nabla_{H_f} + f\ , \tag{1.4}$$

действующий на сечения по правилу

$$Q(f)(s) = i\hbar\nabla_{H_f}(s) + fs.$$

Несложно проверить, что принцип соответствия Дирака при этом выполняется, но получающееся представление алгебры Ли $C^\infty(M)$ никогда не является неприводимым (даже в самом простейшем случае $M = \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}$).

Пространство $\mathcal{H}$ можно сузить при помощи *поляризации*. По определению, поляризация на M — это подрасслоение $\Pi \subset T^{\mathbb{C}}M$ ранга $\mathrm{rk}\Pi = n = \dim M/2$ в комплексифицированном касательном расслоении. Если поляризация фиксирована, то на пространство волновых функций накладывается естественное условие:

$$Q(M) = \mathcal{H}^\Pi = \{s \in \Gamma^\infty(L) \mid \nabla_v s = 0\ \forall\, v \in \Pi\}.$$

Поляризации различаются своим расположением по отношению к имеющейся на $T^{\mathbb{C}}M$ канонической вещественной структуре. Обычно используют два «чистых» крайних случая: *вещественную поляризацию*, когда $\overline{\Pi} = \Pi$, и *комплексную поляризацию*, когда $\overline{\Pi}$ и Π трансверсальны (что равносильно выбору почти комплексной структуры I с $T_I^{0,1} = \Pi$).

Один лишь выбор поляризации, вообще говоря, ещё не сводит процедуру квантования к каой-либо хорошо известной математической теории. Однако в двух специальных случаях:

- когда вещественная поляризация Π вполне интегрируема, т. е. является распределением касательных плоскостей некоторого лагранжева слоения

$$M \xrightarrow{\pi} B, \tag{1.5}$$

  общий слой которого $T^n = \pi^{-1}(b_{\mathrm{gen}})$ является лагранжевым тором размерности n

- когда почти комплексная структура I, задающая комплексную поляризацию, интегрируема и согласована с ω, так что пара (ω, I) задает на M келерову метрику ходжева типа[2]

мы попадаем в классические рамки двух различных разделов геометрии: вещественные поляризации относятся к геометрии симплектической, тогда как комплексные поляризации уводят нас в алгебраическую геометрию.

В вещественном случае условие интегрируемости заключается в том, что любые два векторных поля $\partial_1, \partial_2 \in \Pi$ коммутируют по модулю Π:

$$[\partial_1, \partial_2] \in \Pi \subset TM \ , \tag{1.6}$$

т. е. векторные поля со значениями в Π составляют подалгебру в алгебре Ли всех векторных полей[3].

В комплексном случае условие интегрируемости почти комплексной структуры I задается аналогичным уравнением:

$$[I\partial_1, I\partial_2] = [\partial_1, \partial_2] + I[I\partial_1, \partial_2] + I[\partial_1, I\partial_2], \tag{1.7}$$

где мы рассматриваем I как сечение $\mathrm{End}(TM)$, удовлетворяющее условиям: $I^2 = -1$, $\omega(\partial_1, I\partial_2) = -\omega(I\partial_1, \partial_2)$ и $\omega(\partial_1, I\partial_2) > 0$.

Если исходная механическая система одновременно допускает интегрируемые поляризации обоих типов, мы будем говорить, что её квантование является *полным*. Таким образом, полное квантование относится к пересечению алгебраической и симплектической геометрий.

---

[2]т. е. удовлетворяющую условию (1.3)

[3]в общем случае «коммутант» всех таких полей определяет квадратичную форму на Π с коэффициентами в нормальном расслоении TM/Π абсолютно так же, как в классической дифференциальной геометрии определяется вторая квадратичная форма поверхности, вложенной в $\mathbb{R}^3$

§ 2 Вещественная поляризация (симплектическая геометрия).

Напомним, что цикл $T \subset M$ называется *лагранжевым*, если $\dim T = n = \dim M/2$ и $\omega|_T = 0$. Таким образом, данные предквантования (L, ∇) ограничиваются на T в тривиальное линейное расслоение $L|_T$ с плоской связностью $\nabla|_T$, поскольку кривизна $F_\nabla|_T = 2\pi i\omega|_T = 0$. Классы калибровочной эквивалентности плоских эрмитовых связностей соответствуют, как известно, унитарным характерам фундаментальной группы[1]

$$\pi_1(T) \xrightarrow{\chi} U(1)\,. \tag{1.8}$$

Определение 1. Если $\chi = 1$, т. е. ограничение $L|_T$ обладает ковариантно постоянным унитарным сечением, то лагранжев цикл T называется *бор-зоммерфельдовым*.

Чтобы «убить» характер фундаментальной группы, необходимо наложить $\mathrm{rk}H_1(T, \mathbb{Z})$ условий, и мы можем ожидать, что коразмерность подсемейства бор-зоммерфельдовых циклов в общем семействе лагранжевых циклов будет именно такой. Кроме того, нетрудно видеть, что если гладкий бор-зоммерфельдов цикл T' целиком содержится в некоторой окрестности Дарбу– Вейнстейна другого гладкого бор-зоммерфельдова цикла T, то эти два цикла обязательно имеют нетривиальное пересечение.

Лагранжевы слои вещественной поляризации (1.5) представляют собой семейство лагранжевых циклов, параметризованное n-мерной базой B. Поскольку общий слой $T^n = \pi^{-1}(b_{\mathrm{gen}})$ является n-мерным тором, $\mathrm{rk}H_1(T^n) = n = \dim B$. Таким образом, множество бор-зоммерфельдовых слоев в этом семействе дискретно, и если B компактно, то в нем возникает конечное множество бор-зоммерфельдовых точек $\mathrm{BS} = \{b_1, b_2, \ldots, b_l\} \subset B$, отвечающих таким слоям (см. рис. 1). В этом случае мы определим *пространство волновых функций первого уровня* как прямую сумму ком-

[1] ср. с предл. 1 из § 5 главы 2

плексных прямых:

$$Q_F^1(M) = \mathcal{H}_\pi^1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{b \in \mathrm{BS}} \mathbb{C} \cdot s_b,$$

где s_b — ковариантно постоянное унитарное сечение $L|_{\pi^{-1}(b)}$ (оно определяется однозначно с точностью до фазового множителя из $U(1)$).

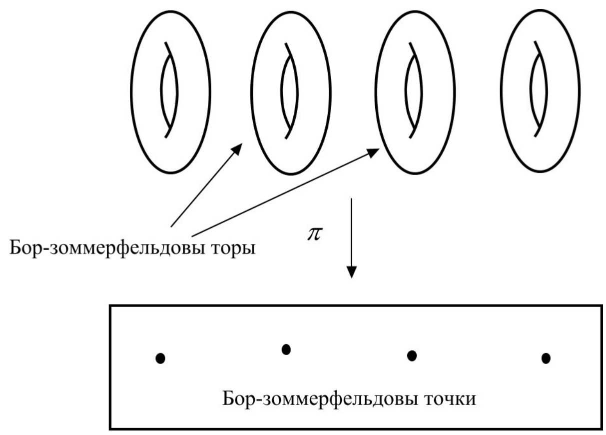

Рис. 1. Бор-зоммерфельдовы слои

Рассмотрим теперь k-тую тензорную степень $L^k|_T$ расслоения предквантования L и обозначим через ∇_k эрмитову связность, канонически индуцированную на нем связностью предквантования ∇ на L. Условия Бора– Зоммерфельда допускают следуюшее расширение.

Определение 2. Если $L^k|_T$ обладает ковариантно постоянным относительно ∇_k унитарным сечением (т. е. $\chi^k = 1$), то лагранжев цикл T называется *бор-зоммерфельдовым уровня* k или, короче, BS_k*-циклом.*

Рассуждая, как выше, мы увидим, что подмножество $\mathrm{BS}_k \subset B$ конечно, и определим соответствующее пространство *волновых функций уровня* k как прямую сумму комплексных прямых:

$$Q_F^k(M) = \mathcal{H}_\pi^k \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{b \in \mathrm{BS}_k} \mathbb{C} \cdot s_b,$$

где s_b являются ковариантно постоянными унитарными сечениями ограничений $(L^k, \nabla_k)|_{\pi^{-1}(b)}$. Более того, BPU-конструкция из § 2 главы 8 канонически снабжает эти пространства эрмитовой структурой, определенной по модулю действия $U(1)$ на сечения s_b (см. стр. 156).

Имея дело с конкретной классической динамической системой (M, ω), хотелось бы ожидать, что результат квантования не зависит от выбора каких бы то ни было дополнительных структур вроде L, ∇, π или I. Предыдущая конструкция пространств волновых функций $\mathcal{H}_\pi$ с точностью до сдвига характеров не зависит от связности[2], а только от ее формы кривизны, которая есть $2\pi i\omega$, но *a priori* зависит от выбора вещественной поляризации π. Тем более замечательным является тот факт, что *проективизация* пространства волновых функций от выбора вещественной поляризации не зависит!

Как показал Б. Костант[3], для любого другого лагранжевого расслоения $M \xrightarrow{\pi'} B'$ имеется каноническое (с точностью до скалярного множителя) эрмитово спаривание между $\mathcal{H}_\pi$ и $\mathcal{H}_{\pi'}$, позволяющее отождествить их проективизации:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}_\pi) = \mathbb{P}(\mathcal{H}_{\pi'}).$$

Это дает нам право понимать пространства волновых функций $\mathcal{H}_\pi$ именно как результат квантования пары (M, ω).

---

[2]характер χ определяется классом калибровочной эквивалентности связности ∇ и на односвязном M однозначно определяется формой кривизны; в неодносвязном случае необходимо еще зафиксировать элемент из $H^1(M, \mathbb{R})$ (см. ниже)

[3]см., например, [42]

§ 3 Келерово квантование (алгебраическая геометрия).

В этом случае данные предквантования образуют четверку (M, ω, ∇, I), в которой пара (ω, I) определяет на M структуру комплексного многообразия и келерову метрику с келеровой формой, пропорциональной ω. В частности, ω, а значит, и кривизна связности ∇ на L, имеют ходжев тип $(1,1)$, поэтому связность предквантования определяет на L структуру *голоморфного* расслоения[1]. По теореме Кодаиры (1958), целочисленность класса когомологий келеровой формы $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ означает ходжевость келеровой метрики. Таким образом, M_I является проективным алгебраическим многообразием, а $L = \mathcal{O}_M(1)$ задает класс его гиперплоских сечений, т. е. комплексная поляризация приводит нас к алгебраической геометрии!

Пространство волновых функций в этом случае превращается в пространство *голоморфных* сечений расслоения L:

$$Q_F(M) = \mathcal{H}_I = H^0(M_I, L).$$

Эрмитова форма на L индуцирует эрмитову форму на $H^0(M_I, L)$, т. е. отождествление

$$\mathcal{H}_I = H^0(M_I, L) \simeq \overline{H^0(M_I, L)}^*. \tag{1.9}$$

Проективизация $\mathbb{P}\left(H^0(M_I, L)\right)$ является классическим примером *полной линейной системы* на M_I, и стандартная алгебро-геометрическая конструкция задает голоморфное отображение

$$M_I \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}\left(H^0(M_I, L)^*\right) \ ,$$

которое в комбинации с (1.9) и сменой комплексной структуры на сопряженную переводит M_I в проективизацию пространства волновых функций:

$$M_I \xrightarrow{\overline{\phi}} \mathbb{P}\Big(H^0(M_I, L)\Big) \ . \tag{1.10}$$

[1] см., например, [28]

Образы точек M_I при этом отображении называются *когерентными состояниями*.

Аналогично из голоморфных сечений тензорных степеней L^k расслоения L мы получаем пространства волновых функций уровня k:

$$\mathcal{H}_I^k = H^0(M_I, L^k)$$

для каждого целого $k \geq 0$. Таким образом, любое симплектическое многообразие (M, ω), подлежащее поляризованному алгебраическому многообразию $(M_I, \mathcal{O}_I(1))$, порождает набор пространств волновых функций $H^0(M_I, \mathcal{O}(k))$, зависящий *a priori* от выбора комплексной структуры.

Напомним, что при достаточно больших[2] k отображения (1.10) являются вложениями, и $\dim H^0(M_I, L^k)$ определяется по формуле Римана– Роха через чисто топологические инварианты M и L. Стремление к геометрической гармонии требует от нас ответа на ключевой вопрос: зависит ли проективизация этих пространств от выбора комплексной структуры? Иными словами, является ли наше квантование классической механической системы (M, ω) успешным, в том смысле, что

$$\text{«}\ \frac{\partial\left(\mathbb{P}H^0(M_I, L)\right)}{\partial I} = 0\ \text{»}\ ?$$

Развернутая математически корректная формулировка этого вопроса такова. Обозначим через $\mathcal{M}$ многообразие модулей (в алгебро-геометрическом смысле) поляризованных алгебраических многообразий $(M_I, \mathcal{O}_I(1))$. По теореме Кодаиры над $\mathcal{M}$ имеется векторное расслоение

$$V_k \xrightarrow{p} \mathcal{M}\ , \tag{1.11}$$

слоями которого $p^{-1}(M_I, \mathcal{O}_I(1)) = H^0(M_I, \mathcal{O}_I(1))$ являются голоморфные сечения расслоения поляризации. Предыдущий вопрос

[2] т. е. *в квазиклассическом пределе*, когда $1/k \to 0$; отметим также, что в квантовании Березина, где вместо операторов (1.4) функциям $f \in C^\infty(M)$ сопоставляются *теплицевы* операторы T_f на $H^0(M_I, L^k)$ (см., например, [59]), соответствие Дирака (1.1), нарушенное при любом конечном k, выполняется асимптотически при $k \to \infty$

сводится к существованию при $k \gg 0$ проективно плоской голоморфной связности на V_k. Такая постановка задачи является совершенно новой в рамках алгебраической геометрии, и прежде, чем рассматривать ее во всех деталях в интересующем нас частном случае $\dim M = 2$, приведем несколько замечаниий общего характера.

1) Если расслоение V допускает голоморфную прективную плоскую связность, то его полином Черна имеет вид

$$c_V(t) = (1 - c \cdot t)^{\mathrm{rk}V} \text{ , где } c \in H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \text{ ,} \tag{1.12}$$

и в частности, $c_1(V) = \mathrm{rk}V \cdot c$, что накладывает очень жесткие ограничения на топологический тип этого расслоения.

2) Все известные классические конструкции голоморфных проективных плоских свзяностей приводят к эрмитовым связностям, но в неабелевом случае (наиболее интересном для нас) этот факт в общем виде до сих пор не установлен.

3) Если искомая связность на расслоениях (1.11) существует, то она индуцирует на V_k некоторое поле Хиггса.

4) Хотя расслоение V_k и голоморфно, мы вполне могли бы предположить, что искомая проективно плоская связность на V_k может быть и не голоморфной. Однако, в контексте конформной теории поля *она необходимо является голоморфной*, хотя за недостатком времени мы вынуждены оставить обсуждение этого вопроса за рамками нашего краткого конспекта.

5) Некоторые физические задачи с самого начала приводят к проективизациям пространств волновых функций, и тогда вместо векторного расслоения (1.11) возникает *проективное расслоение*, которое (даже в бесконечномерном случае, где гильбертовы векторные расслоения всегда топологически тривиальны) *не является*, вообще говоря, проективизацией никакого векторного. Препятствия лежат в группе

Брауера $H^3(\mathcal{M},\mathbb{Z})$, которая доставляет нетривиальный аналог K-функтора Атьи.

§ 4 Расширенная теория Кодаиры–Спенсера.

Теория деформаций комплексных структур была развита Кодаирой и Спенсером много лет назад. Теоретически, для анализа успешности келерового квантования нам надо расширить эту теорию до теории деформаций троек (I, L_I, s), где I — интегрируемая комплексная структура, L_I — голоморфное линейное расслоение, а $s \in H^0(L_I)$ — его голоморфное сечение. Такая расширенная теория наиболее полно представлена в [78].

Для начала рассмотрим инфинитезимальную деформацию $\dot{I}$ комплексной структуры I. Дифференцируя $I^2 = -1$, видим, что $\dot{I}I + I\dot{I} = 0$, т. е.

$$\dot{I} \in \Omega^{0,1}(M_I, T^{1,0}) \ , \tag{1.13}$$

и, как и обычный дифференциал Бельтрами, представляет собою проекцию собственного $(-i)$-подпространства оператора I на его собственное $(+i)$-подпространство. Линеаризация условия интегрируемости (1.7) показывает, что

$$(\overline{\partial}\,\dot{I})^{0,2} = 0 \ . \tag{1.14}$$

Предположим теперь, что выполнены следующие условия:

1) класс поляризации делит антиканонический класс $-K$ многообразия M_I, т. е. $-[K] = n\,[c_1(L)]$;

2) связность Леви– Чивита келеровой метрики ωI на M_I индуцирует на K связность, пропорциональную унитарной связности предквантования ∇ на L;

3) $k \gg 0$, так что $H^i(M_I, \mathcal{O}(K/2 + k \cdot c_1(L))) = 0$ при $i > 0$, и

$$(k + n/2)\, \omega \tag{1.15}$$

является симплектической келеровой формой

(например, это так, если M_I является многообразием Фано индекса n и $L = \mathcal{O}(k)$). В этих предположениях деформация комплексной структуры $\dot{I}$ представляется в виде свертки

$$(k + n/2)\, \omega * W_0 = \dot{I}$$

келеровой формы (1.15) с некоторым гладким сечением[1]

$$W_0 \in \Gamma^\infty(S^2 T^{1,0} M_I) \subset (S^2 T M_I)^{2,0} \tag{1.16}$$

второй симметрической степени голоморфного касательного расслоения. В самом деле, $\dot{I}(T^{0,1}) \subset T^{1,0}$, а симплектическая форма (1.15) имеет тип $(1,1)$ и, как линейный оператор

$$T^{1,0} \oplus T^{0,1} \xrightarrow{(k+n/2)\omega} \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}\,,$$

посылает $T^{1,0}$ в $\Omega^{0,1}$, а $T^{0,1}$ в $\Omega^{1,0}$, так что композиция

$$W_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k + n/2}\, \dot{I} \circ \omega^{-1} :\ \Omega^{1,0} \longrightarrow T^{1,0} \tag{1.17}$$

и является симметрическим тензором требуемого типа.

Теперь допустим, что $\smile$-умножение на класс келеровой формы (1.15):

$$* \smile [(k + n/2)\, \omega] :\ H^0(M_I, T^{1,0}) \longrightarrow H^1(M_I, \mathcal{O}) \tag{1.18}$$

является *изоморфизмом* (например, это так, когда $H^0(M_I, T^{1,0}) = H^1(M_I, \mathcal{O}) = 0$, или когда M_I является поляризованным абелевым многообразием). В этом предположении голоморфная структура на линейном расслоении L_I не добавляет собственных параметров

[1] этот важный тензор был введен Уелтерсом в [78], что мы и подчеркиваем обозначением

деформации при деформации комплексной I на M, и нам остается только исследовать деформации голоморфных сечений L_I.

Напомним, что голоморфная структура на L_I задается связностью предквантования ∇, которую можно разложить по типам как $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$ с

$$\nabla^{1,0} = \frac{1-iI}{2}\,\nabla\ , \quad \nabla^{0,1} = \frac{1+iI}{2}\,\nabla\ .$$

Следуя Н. Хитчину, рассмотрим инфинитезимальную деформацию a голоморфного сечения $s \in H^0(M_I, L_I)$ в некое сечение, голоморфное относительно инфинитезимально деформированной структуры $(I + \dot{I})$. Дифференцируя условие голоморфности:

$$(1 + iI)\nabla s = 0\ ,$$

получаем уравнение

$$i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}s = \nabla^{0,1}a\ , \tag{1.19}$$

из которого $a \in \Gamma^\infty(L)$ линейно зависит от s и $\dot{I}$ и представляет собой «ковариантную производную» s относительно искомой нами связности на расслоении V_k из (1.11). Главным наблюдением расширенной теории Кодаиры - Спенсера является когомологическая интерпретация уравнения (1.19). Для ее получения надо проинтерпретировать обе части (1.19) в терминах пучка $D^1(L)$ ростков дифференциальных операторов первого порядка, действующих на сечениях L.

По теореме Атьи (см. [2]), расслоение первых джетов $J^1(L)$ линейного расслоения L задается расширением вида

$$0 \longrightarrow \Omega^{1,0} \otimes L \longrightarrow J^1(L) \longrightarrow L \longrightarrow 0, \tag{1.20}$$

отвечающим коциклу $[c_1(L)] = [\omega] \in H^1(M_I, \Omega^{1,0})$. Таким образом, пучок $D^1(L) = \mathrm{Hom}(J^1(L), L)$ включается в точную тройку

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow D^1(L) \longrightarrow T^{1,0} \longrightarrow 0,$$

задаваемую коциклом $-[\omega]$. Длинная когомологическая последовательность этой тройки распадается на две части, разделенные изоморфизмом (1.18):

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H^0(M_I, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(M_I, D^1(L)) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow H^1(M_I, D^1(L)) \longrightarrow H^1(M_I, T^{1,0}) \longrightarrow \cdots \end{gathered} \tag{1.21}$$

Первая из них показывает, что каждый глобально определенный голоморфный дифференциальный оператор на L является *умножением на константу*, а вторая влечет *инъективность отображения символа*:

$$H^1(M_I, D^1(L)) \longrightarrow H^1(M_I, T^{1,0}) \ . \tag{1.22}$$

Сечение $s \in H^0(M_I, L_I)$ определяет гомоморфизм вычисления значения дифференциального оператора:

$$d_s : \ D^1(L) \xrightarrow{D \mapsto Ds} L \ .$$

Линейные инфинитезимальные деформации тройки (I, L_I, s) взаимно однозначно соответсвуют классам гиперкогомологий $H^1_h(d_s)$ двучленного комплекса

$$0 \longrightarrow D^1(L) \xrightarrow{d_s} L \longrightarrow 0 \ . \tag{1.23}$$

Каждый класс гиперкогомологий в $H^1_h(d_s)$ реализуется 1-коциклом тотального комплекса, ассоциированного с двойным комплексом

$$C^\bullet(\mathcal{U}, D^1(L)) \xrightarrow{\pm d_s} C^\bullet(\mathcal{U}, L) \ ,$$

где $\mathcal{U}$ — некоторое покрытие Чеха, и представляется парой

$$(\{\dot{s}_i\}, \{\alpha_{i,j}\}) \in C^0(\mathcal{U}, L) \oplus C^1(\mathcal{U}, D^1(L)) \ . \tag{1.24}$$

Спектральная последовательность этого двойного комплекса производит пятичленную точную последовательность

$$\begin{gathered} H^0(M_I, D^1(L)) = \mathbb{C} \longrightarrow H^0(L_I) \longrightarrow H^1_h(d_s) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(D^1(L)) \longrightarrow H^1(L_I) \longrightarrow \cdots \ . \end{gathered} \tag{1.25}$$

С другой стороны, (1.23) определяет точную четверку

$$0 \longrightarrow \ker(d_s) \longrightarrow D^1(L) \longrightarrow L \longrightarrow \operatorname{coker}(d_s) \longrightarrow 0\ , \quad (1.26)$$

и вторая спектральная последовательность дает

$$0 \longrightarrow H^1(\ker(d_s)) \longrightarrow H^1_h(d_s) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^0(\operatorname{coker}(d_s)) \longrightarrow H^2(\ker(d_s))\ .$$

Нетрудно видеть (вслед за Уелтерсом [78]), что носитель

$$\operatorname{Supp}(\operatorname{coker}(d_s)) = \operatorname{Sing}\ ((s)_0)$$

сосредоточен в особых точках дивизора нулей сечения s и может быть очень маленьким. В частности, если дивизор $(s)_0$ гладкий (т. е. в общем случае), точная четверка (1.26) на деле является точной тройкой.

Вернемся теперь к уравнению (1.19). Из (1.13) и (1.14) легко усмотреть, что

$$\left(\overline{\partial}(i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0})\right)^{0,2} = 0\ . \quad (1.27)$$

Таким образом, уравнение (1.19) всегда разрешимо относительно a по лемме Дольбо. Чтобы извлечь из него связность, мы интерпретируем $-a$ и $i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0} \in \Omega^{0,1}(M_I, D^1(L))$ как $(0,1)$-формы со значениями в $D^1(L)$ и рассмотрим комплекс[2] $C^\bullet$:

$$\begin{aligned} C^m &= \Omega^{0,m}(M_I, D^1(L)) \oplus \Omega^{0,m-1}(M_I, L_I) \\ d_s\ :\ C^m &\xrightarrow{(D,a)\mapsto(\overline{\partial}D,\overline{\partial}a+i^{m-1}Ds)} C^{m+1} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Тогда в силу (1.27) и (1.19) наша пара $(i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}\,,\,-a) \in C^1$ является 1-коциклом: $d_s(i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}\,,\,-a) = 0$, т. е. любое решение (1.19) определяет некоторый гиперкогомологический класс в $H^1_h(d_s)$.

Теперь, для того чтобы построить проективную связность на векторном расслоении голоморфных сечений (1.11), нам достаточно построить отображение

$$\Omega^{0,1}(M_I, T^{1,0}) \oplus H^0(M_I, L_I) \xrightarrow{A} H^1_h(d_s)\ , \quad (1.29)$$

[2] равенство $d_s^2 = 0$ вытекает из условия голоморфности $\overline{\partial}s = 0$

композиция которого с естественным отображением символа

$$H^1_h(d_s) \xrightarrow{\sigma} H^1(M_I, T^{1,0}) \tag{1.30}$$

переводит любую пару $(\dot{I}, s) \in \Omega^{0,1}(M_I, T^{1,0}) \oplus H^0(M_I, L_I)$ в когомологический класс $[\dot{I}] \in H^1(M_I, T^{1,0})$.

Действительно, представим класс из $H^1_h(d_s)$ парой (1.24):

$$(D, s') \in \Omega^{0,1}(M_I, D^1(L)) \oplus \Omega^{0,0}(M_I, L_I) \; .$$

Тогда (ввиду инъективности символьного отображения (1.22)) из когомологичности символов $-i\,\sigma(D)$ и $i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}$ вытекает когомологичность самих этих операторов в $\Omega^{0,1}(M_I, D^1(L))$, т. е. существование глобального оператора $\mathcal{D} \in \Omega^0(M_I, D^1(L))$, такого что

$$\overline{\partial}\mathcal{D} = D - i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0} \; .$$

Из условия коцикличности $d_s(D, s') = 0$ (см. (1.28)) вытекает, что

$$Ds + \overline{\partial}s' = i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}s + \overline{\partial}(\mathcal{D}s + s') \; ,$$

т. е. $-a = \mathcal{D}s + s'$ является решением уравнения (1.19).

Так как для любых двух решений a_1, a_2 уравнения (1.19) гиперкоциклы $(i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}\,, -a_1)$ и $(i\,\dot{I}\,\nabla^{1,0}\,, -a_2)$ когомологичны, их разность имеет вид $(0, a_1 - a_2) = d_s\mathcal{D}'$. Из определения d_s (см. (1.28)) вытекает, что $\overline{\partial}\mathcal{D}' = 0$, и стало быть $a_1 - a_2 = \lambda s$, поскольку каждый голоморфный оператор первого порядка является умножением на некоторую константу. Геометрически это означает наличие голоморфной связности на проективизации векторного расслоения (1.11).

Итак, нам остается лишь построить отображение A из (1.29). Оно канонически индуцируется голоморфным симметрическим тензором W_0 из (1.17). Рассмотрим пучок $D^2(L)$ голоморфных дифференциальных операторов второго порядка на L, задаваемый стандартным расширением

$$0 \longrightarrow D^1(L) \longrightarrow D^2(L) \longrightarrow S^2(T^{1,0}) \longrightarrow 0 \, , \tag{1.31}$$

и аналогичный (1.23) двучленный комплекс

$$0 \longrightarrow D^2(L) \xrightarrow{d'_s} L \longrightarrow 0 \ ,$$

дифференциал которого вычисляет значение оператора на сечении $s \in H^0(M_I, L_I)$. Точная тройка двучленных комплексов-столбцов:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D^1(L) \arrow[r] \arrow[d, "d_s"] & D^2(L) \arrow[r] \arrow[d, "d'_s"] & S^2(T^{1,0}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

порождает точную последовательность гиперкогомологий:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_h(d_s) \longrightarrow H^0_h(d'_s) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^0(M_I, S^2(T^{1,0})) \xrightarrow{\phi_s} H^1_h(d_s) \longrightarrow H^1_h(d'_s) \longrightarrow \cdots \ , \end{aligned} \tag{1.32}$$

согласно которой всякая голоморфная квадратичная форма на касательном расслоении определяет некоторый (возможно, и тривиальный) одномерный класс гиперкогомологий (эта конструкция, разумеется, зависит от выбора сечения s, поэтому мы и обозначили интересующее нас отображение через ϕ_s). Композиция ϕ_s с отображением символа σ (см. (1.30)) дает гомоморфизм

$$H^0(M_I, S^2(T^{1,0})) \xrightarrow{\mu_L} H^1(M_I, T^{1,0}) \ ,$$

который уже не зависит от s, поскольку[3]

$$\mu_L(W_0) = -W_0 * [c_1(L)] + \mu_{\mathcal{O}}(W_0). \tag{1.33}$$

Так как класс расширения (1.20), задающего пучок джетов, равен половине канонического класса: $[K_{M_I}]/2 \in \Omega^{1,1}$ комплексного многообразия M_I (он зависит только от ω и не меняется при

[3]формулу (1.33) естественно было бы назвать «когомологическим уравнением теплопроводности»: на поляризованном абелевом многообразии отображение $\mu_{\mathcal{O}}$ тривиально, как и все расширения $D^n(\mathcal{O})$, поэтому все кограничные гомоморфизмы в этом случае тривиальны

вариации согласованной с ω комплексной структуры), из (1.17) вытекает, что $\mu_{\mathcal{O}}(W_0) = -W_0 * [K_{M_I}]/2$ и

$$\mu_L(W_0) = -W_0 * ([c_1(L)] + [K_{M_I}]/2)$$

(разумеется, эту формулу при желании можно переписать более «явно», представив все когомологические классы формами и использовав явное выражение для связности Леви– Чивита на тензорных расслоениях, см. [38]).

Итак, расширенная теория Кодаиры– Спенсера определяет каноническую голоморфную проективную связность на векторном расслоении (1.11), кривизна которой может быть вычислена в терминах когомологических классов Дольбо или Чеха.

В заключение отметим, что существование тензора Уелтерса (1.16) накладывает значительное геометрическое ограничение на M_I: например, его канонический класс K_{M_I} не может быть положительным, так что M_I не может быть многообразием общего типа.

§ 5 Строгие модулярные соответствия.

Предположим, что наше многообразие M_I, рассматриваемое как точка I многообразия модулей $\mathcal{M}$ всех его деформаций, определяет некоторое новое поляризованное алгебраическое многообразие $M'_{I'}$, отвечающее точке I' какого-то другого многообразия модулей $\mathcal{M}'$ таким образом, что мы можем полностью восстановить исходное M_I в терминах $M'_{I'}$. Геометрически это означает наличе голоморфного вложения многообразий модулей

$$\mathcal{M} \xrightarrow{J} \mathcal{M}' : \quad J(I) = I' \,. \tag{1.34}$$

Если при этом любой морфизм поляризованных многообразий из $\mathcal{M}$ порождает морфизм соответствующих многообразий в $\mathcal{M}'$, то отображение (1.34) называется *строгим модулярным соответствием*.

В этом случае исходные многообразия и их образы *геометрически эквивалентны*, хотя и могут иметь при этом разные внешние атрибуты — скажем, размерности и т. п.. Профессионализм алгебраического геометра проявляется в умении распознать такие эквивалентные геометрические объекты в их различных конкретных реализациях.

Например, гладкое пересечение $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^5$ пары квадрик в пятимерном проективном пространстве геометрически эквивалентно алгебраической кривой Σ_I рода 2. Для восстановления этой кривой по X достаточно заметить, что X односвязно (по теореме Лефшеца), канонический класс $K_X = \mathcal{O}_X(-2)$ (т. е. вложение X в $\mathbb{P}^5$ является каноническим), линейная система $|2H - X|$ всех квадрик в $\mathbb{P}^5$, проходящих через X, является пучком (т. е. параметризуется проективной прямой), подмножество особых квадрик в этом пучке состоит из шести различных точек, и искомая кривая Σ_I рода 2 представляет собою разветвленное в этих шести точках двойное накрытие над $\mathbb{P}^1 = |2H - X|$ (отметим, что это двойное накрытие задается канонической линейной системой на Σ_I). Проверка того, что пучок квадрик в $\mathbb{P}^5$ с заданным набором особых квадрик, соответствующих точкам ветвления двойного накрытия, единственен с точностью до линейного преобразования, является несложным упражнением в линейной алгебре.

Если $M_I \longmapsto M'_{I'}$ является строгим модулярным соответствием между разными реализациями эквивалентных геометрических объектов, то естественно считать успешное квантование на $\mathcal{M}'$ квантованием для $\mathcal{M}$, полагая

$$Q(M_I) \stackrel{\text{def}}{=} Q(M'_{I'}) \ . \tag{1.35}$$

(если векторные расслоения (1.11) на $\mathcal{M}'$ допускали существование проективно плоских голоморфных связностей, то их подъем на $\mathcal{M}$ также будет обладать этим свойством).

§ 6 Полное квантование.

Предположим, что алгебраическое многообразие $(M_I, \mathcal{O}(1))$ с ходжевой формой ω, как вещественное $2n$-мерное симплектическое многообразие, допускает кроме интегрируемой комплексной поляризации еще и интегрируемую вещественную поляризацию (1.5), т. е. проекцию $M \xrightarrow{\pi} B$, общим слоем которой является n-мерный лагранжев тор T^n. Будем считать (см. § 2 главы 1), что множество бор-зоммерфельдовых слоев $\mathrm{BS}_k \subset B$ конечно, и соответствующее пространство волновых функций уровня k задается как прямая сумма

$$\mathcal{H}_\pi^k = \bigoplus_{b \in \mathrm{BS}_k} \mathbb{C} \cdot s_b \ ,$$

где s_b есть ковариантно постоянные сечения $(L^k, \nabla_k)|_{\pi^{-1}(b)}$. Допустим также, что имеется естественный изоморфизм

$$\mathbb{P}Q_F^k(M) = \mathbb{P}H^0(M_I, \mathcal{O}(k)) \ . \tag{1.36}$$

Скажем, что в этом случае система (M, ω) допускает *полное квантование*.

Наличие полного квантования влечет множество замечательных и полезных следствий. Прежде всего, оба квантования успешны, поскольку левая часть (1.36) не зависит от выбора комплексной поляризации, а правая — от выбора вещественной. Во-вторых, каноническое разложение левой части в прямую сумму одномерных пространств доставляет[1] специальный базис в полной линейной системе, стоящей в правой части (1.36) (базис такого вида естественно назвать *бор-зоммерфельдовым*).

Первый пример полного квантования доставляет классическая теория ϑ-функций. Однако, этот пример не является простейшим — гораздо более простой пример получается из двумерной сферы S^2, реализованной как комплексная сфера Римана $\mathbb{CP}_1$ с действием $U(1) = S^1$ вращениями вокруг оси, проходящей через 0

[1] возможно, после фиксации дополнительной «жесткости» вроде ϑ-структуры на абелевом многообразии, см. [49]

и ∞. Превратим S^2 в фазовое пространство классической механической системы с помощью $U(1)$-инвариантной симплектической формы ω единичного объема, а в качестве данных предквантования возьмем линейное расслоение $\mathcal{O}(1)$ степени 1 на $\mathbb{CP}_1$ со стандартной $U(1)$-инвариантной унитарной связностью ∇. Для комплексного квантования мы должны выбрать комплексную структуру — она на $\mathbb{CP}_1$ единственна, и приводит к пространству волновых функций

$$\mathcal{H}_I^k = H^0(\mathcal{O}(k)) \ . \tag{1.37}$$

Проекция на ось вращения $S^2 \xrightarrow{\pi} [-1\,,\,1]$ задает вещественную поляризацию, бор-зоммерфельдовы слои которой в угловых координатах взаимно-однозначно соответствуют мономам Фурье, составляющим специальный $U(1)$-инвариантный базис пространства однородных многочленов (1.37).

Таким образом, несмотря на то, что в этом случае нарушены все «теоретические» предпосылки, перечисленные в § 4 главы 1, мы получаем, тем не менее, успешное полное квантование.

Можно отказаться от требования «естественности» изоморфизма (1.36) и ограничиться лишь требованием совпадения размерностей пространств волновых функций. При выполнении этого ослабленного свойства мы будем называть квантование *численно полным*. Такие совпадения размерностей известны для поверхностей типа K3 и многих других, но исторически первым примером были системы Гельфанда–Цейтлина (см. [33]). Геометрия, подлежащая подобному совпадению чисел, обсуждается ниже в формулах (2.8) – (2.9) (см. также [72]).

Глава 2.
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ = = РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1 Прямой подход.

Пусть Σ — компактная гладкая ориентированная риманова поверхность рода $g > 1$, и I — комплексная структура на ней, превращающая Σ в алгебраическую кривую Σ_I. Такая кривая допускает каноническую поляризацию, задаваемую кокасательным расслоением
$$T^*\Sigma_I = \mathcal{O}(K) ,$$
где K — канонический класс[1] Σ_I. Кроме того, комплексная структура I определяет на Σ конформный класс римановых метрик, и если фиксировать некоторую метрику из этого класса и рассмотреть индуцированную связность Леви - Чивита на T^*, мы получим данные предквантования $(T^*\Sigma, \nabla_{\mathrm{LC}})$, которые несут в точности ту же информацию, что и голоморфные данные $(\Sigma_I, \mathcal{O}(K))$.

Для каждого уровня k пространства голоморфных сечений $H^0(\Sigma_I, \mathcal{O}(kK))$ образуют векторное расслоение

$$V_k \xrightarrow{p_k} \mathcal{M}_g$$

над $(3g-3)$-мерным многообразием $\mathcal{M}_g$ модулей кривых рода g. Например, при $k = 2$ мы получаем расслоение квадратичных

[1]см., например, [17]

дифференциалов $V_2 = T^*\mathcal{M}_g$, изоморфное кокасательному расслоению многообразия модулей, и в частности, канонический класс многообразия модулей $K_{\mathcal{M}_g} = c_1(V_2)$ совпадает с первым классом Черна векторного расслоения V_2.

Согласно Д. Мамфорду, канонический класс многообразия модулей представляется в виде

$$K_{\mathcal{M}_g} = 13\,\Theta + \text{дивизоры, лежащиие на границе},$$

где Θ — дивизор нулевых ϑ-констант, и если бы V_2 обладало голоморфной проективной плоской связностью, 13 делилось бы на $3g-3$. Поскольку это не так, никакой плоской проективной связности на V_2 нет, и значит, классическая динамическая система, отвечающая ограничению на Σ_I стандартной формы Фубини– Штуди, не может быть успешно проквантована как поляризованное алгебраическое многообразие.

Однако, история на этом не заканчивается — ведь мы можем поискать подходящее модулярное соответствие!

§ 2 Якобианы.

Строгое модулярное соответствие, которое первым приходит в голову, сопоставляет алгебраической кривой ее поляризованный якобиан $(J(\Sigma_I), \Theta)$. Из множества эквивалентных определений якобиана для наших нужд более всего подходит реализация $J(\Sigma_I)$ как многообразия модулей топологически тривиальных голоморфных линейных расслоений на Σ_I.

Рассматривая точки кривой как дивизоры степени 1, фиксируем любую точку $p_0 \in \Sigma_I$. Сопоставляя произвольной точке $p \in \Sigma_I$ (топологически тривиальное) линейное расслоение $\mathcal{O}(p - p_0)$, получаем отображение

$$\Sigma_I \xrightarrow{a_{p_0}} J(\Sigma_I) \ ,$$

которое, по теореме Римана, является при $g > 0$ вложением и индуцирует изоморфизм

$$H_1(\Sigma,\mathbb{Z}) \xrightarrow{a} H_1(J(\Sigma_I),\mathbb{Z})\ . \tag{2.1}$$

Многообразие модулей линейных расслоений является группой относительно операции тензорного произведения расслоений, и мы можем рассмотреть отображение Понтрягина

$$\Sigma_I^{[g-1]} \xrightarrow{a_{p_0}^{g-1}} J(\Sigma_I),$$

переводящее набор точек $(p_1, p_2, \ldots, p_{g-1})$ в линейное расслоение

$$\mathcal{O}(p_1 + \cdots + p_{g-1} - (g-1)p_0) \in J(\Sigma_I)\ .$$

Образ этого отображения является дивизором[1] $\Theta \subset J(\Sigma_I)$, и соответствующее ему линейное расслоение на $J(\Sigma_I)$ обладает единственным (с точностью до умножения на ненулевую константу) нетривиальным глобальным голоморфным сечением[2].

Чтобы восстановить кривую Σ_I по паре $(\Theta, J(\Sigma_I))$, надо рассмотреть отображение Гаусса:

$$\Theta \xrightarrow{G} \mathbb{P}T^* J(\Sigma_I)\ ,$$

сопоставляющее неособой точке $t \in \Theta$ проективизацию аннулятора ее касательной гиперплоскости $T_t\Theta \subset TJ(\Sigma_I)$. Поскольку кокасательное расслоение на группе тривиально:

$$\mathbb{P}T^* J(\Sigma_I) = \mathbb{P}^{g-1} \times J(\Sigma_I)\ ,$$

композиция гауссова отображения с проекцией

$$\mathbb{P}T^* J(\Sigma_I) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^{g-1}$$

дает рациональное накрытие $G \circ p\ :\ \Theta \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} = |K|$, дивизор ветвления которого двойствен образу канонического вложения[3]

[1] так называемым Θ-*дивизором*

[2] дивизор нулей которого и есть Θ

[3] если кривая Σ_I гиперэллиптична, надо использовать другие аргументы

$\Sigma_I \longrightarrow |K|^*$, после чего классическая теория проективной двойственности восстановит саму кривую по двойственному ей дивизору. Таким образом, сопоставление $\Sigma_I \longmapsto (J(\Sigma_I), \Theta)$ действительно является строгим модулярным соответствием, и мы можем сначала проквантовать главно поляризованное абелево многообразие $(J(\Sigma_I), \Theta)$, а затем воспользоваться рецептом (1.35).

Пространствами волновых функций такого квантования являются пространства голоморфных сечений:

$$\mathcal{H}_I^k = H^0\left(J(\Sigma_I), \mathcal{O}(k\Theta)\right) \ ,$$

(обычно называемые *пространствами ϑ-функций уровня k* на римановой поверхности Σ_I), и проективно плоская связность на соответствующих векторных расслоениях (1.11) над многообразием модулей главно поляризованых абелевых многообразий, как известно[4], имеется.

Однако ситуация, с которой мы тут сталкиваемся, оказывается куда более замечательной, чем просто успешное квантование!

§ 3 Алгебро-геометрическая теория ϑ-функций.

Всякое g-мерное главно поляризованное абелево многообразие (A, Θ) содержит конечную подгруппу K, сдвиги на которую переводят линейное расслоение $\mathcal{O}(k\Theta)$ в себя, и нетрудно видеть, что

$$K = A_k \subset A \tag{2.2}$$

совпадает с подгруппой точек k-того порядка в абелевой группе A. На K имеется каноническая симплектическая форма, задаваемая топологическим пересечением класса Θ с ориентированным 2-циклом, натянутым на пару элементов из K. Индуцированное этой формой разложение $K = K_+ \times K_-$ в прямую сумму двух изотропных подгрупп называется *ϑ-структурой уровня k*.

[4]см. [78]

Замечательный классический результат[1] состоит в том, что полная линейная система $|k\Theta|$ содержит единственный дивизор D_+, инвариантный относительно сдвигов на элементы подгруппы K_+, так что любому элементу $a \in K_-$ можно канонически сопоставить дивизор $D_+ + a$ и рациональную функцию ϑ_a с полюсом на дивизоре D_+ и нулем на дивизоре $D_+ + a$, что даст разложение пространства голоморфных сечений линейного расслоения $k\Theta$ в прямую сумму одномерных подпространств:

$$H^0(A, \mathcal{O}(k\Theta)) = H^0(A, \mathcal{O}(D_+)) = \bigoplus_{a \in K_-} \mathbb{C} \cdot \vartheta_a. \tag{2.3}$$

Функция ϑ_a называется *ϑ-функцией с характеристикой $a \in K_-$*, а разложение (2.3) — *разложением по ϑ-функциям с характеристиками*. Отметим, что порядки наших конечных абелевых групп равны

$$|K| = k^{2g}\ , \quad |K_\pm| = k^g\ .$$

Применим теперь к паре $(A, \mathcal{O}(k\Theta))$ расширенную теорию Кодаиры - Спенсера из § 4 главы 1. Поскольку отображение (1.18):

$$H^0(A, TA) \longrightarrow H^1(A, \mathcal{O}_A)$$

на любом абелевом многообразии является изоморфизмом, когомологическая последовательность (1.21) дает

$$H^0(A, \mathcal{O}) = H^0(A, D^1(\mathcal{O}(k\Theta)))\ .$$

Из длинной когомологической последовательности тройки (1.31)

$$H^0(A, S^2(T)) = H^1(A, D^1(k\Theta))\ ,$$

а (1.25) превращается в точную тройку

$$0 \longrightarrow \frac{H^0(A, \mathcal{O}(k\Theta))}{\mathbb{C} \cdot s} \longrightarrow H^1_h(d_s) \longrightarrow H^1(A, D^1(\mathcal{O}(k\Theta))) \longrightarrow 0.$$

Тем самым, при деформации пары $(A, \mathcal{O}(k\Theta))$ каждое сечение $s \in H^0(A, k\Theta)$ имеет *единственную* деформацию в голоморфное

[1] воспроизведенный Д. Мамфордом в [49]

сечение. Эта деформация является решением *уравнения теплопроводности*, и ниже в (2.19) мы дадим для нее стандартную явную формулу.

§ 4 Комбинаторно-симплектическая теория ϑ-функций.

Поскольку абелево многообразие A является $2g$-мерным вещественным тором, его главная поляризация определяется классом

$$\omega \in H^2(A, \mathbb{Z}) = \wedge^2 H^1(A, \mathbb{Z}) , \tag{2.4}$$

который можно интерпретировать как унимодулярную кососимметрическую форму на $H_1(A, \mathbb{Z})$ (в случае, когда $A = J(\Sigma)$ является якобианом кривой, эта форма индуцируется формой пересечения 1-циклов на подлежащей римановой поверхности Σ). Из общей теории таких форм вытекает, что $H_1(A, \mathbb{Z})$ раскладывается в прямую сумму двух изотропных целочисленных подрешеток, двойственных относительно ω. Это разложение ведет к разложению $2g$-мерного тора A в прямую сумму двух g-мерных лагранжевых подторов:

$$A = T^{2g} = T^g_+ \times T^g_- , \tag{2.5}$$

и проекция на второй из них

$$A \xrightarrow{\pi} T^g_- \tag{2.6}$$

задает на A интегрируемую вещественную поляризацию[1], и непосредственно из определений мы получаем, что множество бор-зоммерфельдовых слоев уровня k: $\mathrm{BS}_k = (T^g_-)_k \subset T^g_-$ в точности совпадает с подгруппой точек k-того порядка на торе T^g_- (см. рис. 2 на стр. 35).

[1] т. е. вполне интегрируемую динамическую систему

Итак, бор-зоммерфельдово квантование приводит к пространствам волновых функций:

$$Q_\pi^k(T^{2g}, \omega) = \bigoplus_{a \in (T_-^g)_k} \mathbb{C} \cdot s_a, \tag{2.7}$$

(где s_a есть ковариантно постоянные унитарные сечения ограничений расслоения предквантования на бор-зоммерфельдовы слои), которые имеют те же размерности, что и пространства волновых функций келерова квантования, так что наше квантование является численно полным (см. конец § 5 главы 1).

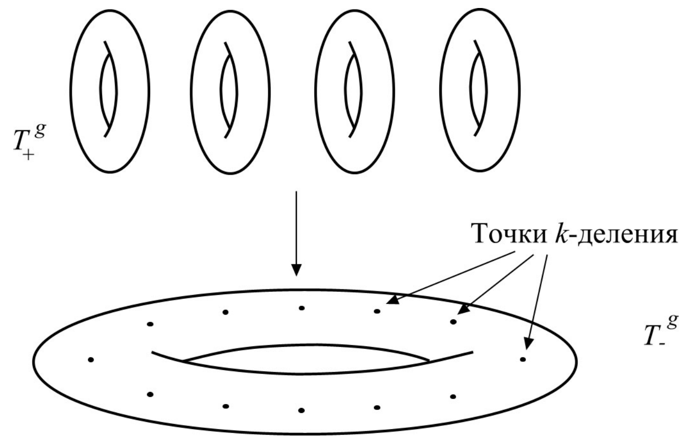

Рис. 2. Бор-зоммерфельдовы точки тора

Мы получаем здесь первое поистине удивительное совпадение, и хотелось бы сказать несколько слов о той геометриии, которая за ним стоит.

Возвращаясь к лагранжеву расслоению (2.6), заменим в нем каждый слой T_+^g на двойственный тор[2] $(T_+^g)^*$. Получим так называемое *двойственное расслоение*

$$A' = (T')^{2g} \xrightarrow{\pi'} T_-^g, \tag{2.8}$$

[2]проще всего представлять себе $(T_+^g)^*$ как пространство классов калибровочно эквивалентных плоских $U(1)$- связностей на тривиальном линейном расслоении над T_+^g

представляющее собою *a priori* другой $2g$-мерный тор, поляризованный новой симплектической формой ω' так же, как и выше.

Если задать на исходном комплексном торе A линейное расслоение предквантования L с $U(1)$-связностью, кривизна которой пропорциональна ω, то его ограничение на лагранжев слой $T^g_+ = \pi^{-1}(a)$ над произвольной точкой $a \in T^g_+$ будет тривиальным расслоением с плоской $U(1)$-связностью над T^g_+, т. е. точкой двойственного тора $s_L(a) \in (T^g_+)^*$. Иными словами, расслоение L определяет сечение

$$T^g_+ \xrightarrow{s_L} (T')^{2g} = A' \ ,$$

образ которого $s_L(T^g_+) \subset A'$ является лагранжевым подмногообразием срединной размерности.

Кроме этого сечения расслоение на двойственные торы (2.8) имеет нулевое сечение $T^g_+ \xrightarrow{s_{\mathcal{O}}} (T')^{2g}$, отвечающее тривиальной связности на $T^g_+ \times U(1)$ и задающее еще одно лагранжево подмногообразие срединной размерности в A'. Множество бор-зоммерфельдовых слоев уровня k является, очевидно, пересечением: $\mathrm{BS}_k = s_{\mathcal{O}} \cap s_{L^k}$. Поскольку оба лагранжевых цикла ориентированы, число бор-зоммерфельдовых слоев положительно и совпадает с индексом пересечения классов гомологий

$$\#\mathrm{BS}_k = [s_{\mathcal{O}}] \cdot [s_{L^k}] \ , \tag{2.9}$$

который легко вычисляется через первый класс Черна $c_1(L)$.

Вывод из всего сказанного следующий. Для каждого абелева многообразия $A = T^{2g}$ имеется симплектически двойственное абелево многообразие $A' = (T')^{2g}$, такое что алгебраическая геометрия когерентных пучков на A находит свое отражение в симплектической геометрии лагранжевых циклов (или суперциклов) на A'. Этот «двойник» обычно называется *зеркальным партнером* исходного многообразия. Зеркальная симметрия является ныне настолько высоко развитой областью математики и физики, что мы не можем охватить ее тут в двух словах и отсылаем читателя, например, к обзору [16]. Приведенная нами конструкции совпадает с подходом Штромингера – Яу – Заслова, но мы не будем сейчас вдаваться в ее возможные формальные обобщения[3].

Читатель, вероятно, уже догадался, что совпадение размерностей — это лишь промежуточный результат, и развивая успех, можно построить в обоих пространствах волновых функций естественно согласованные ϑ-базисы, т. е. канонически сопоставить каждому бор-зоммерфельдову слою лагранжева расслоения (2.6) голоморфное сечение Θ-расслоения уровня k. Это делается посредством так называемого *преобразования когерентных состояний* [4], обобщающего изоморфизм Сигала–Баргмана, который (в контексте квантовой теории), отождествляет гильбертовы пространства функций с интегрируемым квадратом на конфигурационном пространстве и голоморфных функций на пространстве фазовом.

В конечномерном случае конфигурационным пространством является $\mathbb{R}^g$ — вещественная часть фазового пространства $\mathbb{C}^g$, и преобразование когерентных состояний задает унитарный изоморфизм

$$L^2(\mathbb{R}^g, d^g x) \xrightarrow{\mathrm{CST}_t} L^2(\mathbb{C}^g, d\mu_t) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}^g) \ ,$$

где в правой части через $\mathcal{H}$ обозначено пространство голоморфных функций, а $d\mu_t$ обозначает гауссову меру. В нашем случае $\mathbb{R}^g$ заменяется[5] на вещественный тор[6] $T^g_- = U(1)^g$, а $\mathbb{C}^g$ — на комплексный тор $(\mathbb{C}^*)^g$. Обозначим через $\vec{z} = \vec{x} + i\,\vec{y}$ координаты на универсальной накрывающей

$$\begin{gathered} \mathcal{U} = \mathbb{C}^g \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^g \\ (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto \left(e^{2\pi i z_1}, e^{2\pi i z_2}, \ldots, e^{2\pi i z_g}\right) \ . \end{gathered} \tag{2.10}$$

[3] см., например, [72]

[4] т. е. coherent state transform

[5] Б. К. Холл в [36] обобщил преобразование когерентных состояний на случай комплексификаций произвольных вещественных групп Ли компактного типа, и ниже, в неабелевом случае, мы будем использовать его конструкцию для пары SU(2), SL(2, $\mathbb{C}$); однако, здесь мы имеем гораздо более простую ситуацию абелевых групп $U(1)^g \subset (\mathbb{C}^*)^g$

[6] т. е. «нулевое сечение» проекции (2.6) — отметим, что оно является *специальным лагранжевым* подтором в A, см. [73]

Тогда $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_g) \in [\,0\,,\,1\,]^g$ дадут периодические координаты на $U(1)^g$, а форма $d\vec{x}\,d\vec{y}$ индуцирует на $(\mathbb{C}^*)^g$ обычную меру Хаара. Возвращаясь к разложению $H_1(A,\mathbb{Z}) = H_1(T^g_+,\mathbb{Z}) \oplus H_1(T^g_-,\mathbb{Z})$ в сумму изотропных подпространств формы ω, фиксируем в них некоторые базисы:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_g\} \subset H_1(T^g_-,\mathbb{Z})\ , \quad \{b_1, b_2, \ldots, b_g\} \subset H_1(T^g_+,\mathbb{Z})\ , \tag{2.11}$$

так чтобы полный набор $(\,a_1, a_2, \ldots, a_g\ ,\ b_1, b_2, \ldots, b_g\,)$ был симплектическим базисом $H_1(A,\mathbb{Z})$, обозначим через

$$\Omega = \|\Omega_{ij}\| = \mathrm{Re}\,\Omega + i\,\mathrm{Im}\Omega \tag{2.12}$$

его матрицу периодов[7] и рассмотрим соответствующий $U(1)$-инвариантный лапласиан

$$\Delta^{\mathrm{Im}\Omega} = \sum_{i,j=1}^{g} \frac{\mathrm{Im}\Omega_{ij}}{2\pi}\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\ , \tag{2.13}$$

а также $U(1)^g$-инвариантный комплексный лапласиан

$$\Delta^{\mathrm{Im}\Omega}_{\mathbb{C}} = \sum_{i,j=1}^{g} \frac{\mathrm{Im}\Omega_{ij}}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \right)\ .$$

Обозначим через μ_t фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$4\,\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^{\mathrm{Im}\Omega}_{\mathbb{C}} u$$

на $(\mathbb{C}^*)^g$ и рассмотрим усреднение $\nu_t(\vec{z})\,d\vec{x}d\vec{y}$ подкрученной меры Хаара $\mu_t\,d\vec{x}d\vec{y}$ по действию $U(1)^g$:

$$\nu_t(\vec{z}) = \int\limits_{U(1)^g} \mu_t(\vec{z} + \vec{x})\ d\vec{x} =$$

$$= \frac{(2/t)^{g/2}}{\sqrt{\det(\mathrm{Im}\Omega)}} \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2t} \sum_{i,j} (z_i - \overline{z}_i)\,(\mathrm{Im}\Omega)^{-1}_{ij}\,(z_j - \overline{z}_j) \right)\ .$$

[7] Напомним, что она является точкой верхнего зигелева полупространства H

Кроме того, рассмотрим несамосопряженный оператор Лапласа:

$$\Delta^{-i\,\Omega} = \frac{i}{2\pi} \cdot \sum_{i,j=1}^{g} \Omega_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \,. \tag{2.14}$$

Преобразование когерентных состояний

$$L^2(U(1)^g,\, d\vec{x}) \xrightarrow{\mathrm{CST}_t^{(-i\Omega)}} L^2((\mathbb{C}^*)^g, d\nu_t) \cap \mathcal{H}((\mathbb{C}^*)^g) \tag{2.15}$$

переводит функцию $f \in L^2(U(1)^g, d\vec{x})$ с разложением Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} a_n \exp\left(2\pi i\, \vec{x}\cdot\vec{n}\right) \tag{2.16}$$

в решение комплексного уравнения теплопроводности

$$2\,\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^{(-i\Omega)} u$$

на $(\mathbb{C}^*)^g$ с начальным условием f вдоль $U(1)^g \subset (\mathbb{C}^*)^g$, т. е. в

$$\mathrm{CST}_t^{(-i\Omega)} f(\vec{z}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} a_n \exp\left(\pi i t\, \vec{n}\cdot\Omega\cdot\vec{n} + 2\pi i\, \vec{x}\cdot\vec{n}\right)$$

В [26] К. Флорентино, Ж. Мурао и Ж. Нуньес доказали

Предложение 1. *Преобразование* (2.15) *является унитарным.*

Далее преобразование (2.15) продолжается с $L^2(U(1)^g, d\vec{x})$ на пространство $(C^\infty(U(1)^g))'$ обобщенных функций, задаваемых рядами (2.16), ограниченными условием:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;:\quad \lim_{\vec{n}\cdot\vec{n}\to\infty} \frac{|a_n|}{(1+\vec{n}\cdot\vec{n})^N} = 0 \,.$$

Степени оператора Лапласа действуют на таких распеределениях[8] как непрерывные линейные операторы, так что при $t > 0$

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} a_n e^{2\pi i\, \vec{x}\cdot\vec{n}} \xmapsto{e^{\frac{t}{2}\Delta^{(-i\Omega)}}} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} a_n e^{\pi i t\, \vec{n}\Omega\vec{n} + 2\pi i\, \vec{z}\cdot\vec{n}} \tag{2.17}$$

[8] двойственно их действию на $C^\infty(U(1)^g)$

В той же работе [26] доказано

Предложение 2. *Для $f \in (C^\infty(U(1)^g))'$ правая часть* (2.17) *является голоморфной функцией на* $(\mathbb{C}^*)^g$.

Теперь мы можем сопоставить каждому бор-зоммерфельдову слою проекции (2.6) некоторую аналитическую функцию на $(\mathbb{C}^*)^g$. Для этого мы заменим непрерывный параметр $t > 0$ в уравнении теплопроводности дискретным значением $1/k$ и для любого элемента $\ell \in \mathbb{Z}^g/k\mathbb{Z}^g$ применим преобразование (2.17) к δ-функции k-того порядка, сосредоточенной в ℓ-той бор-зоммерфельдовой точке уровня k проекции (2.6):

$$\vartheta_\ell^{\mathbb{R}}(x) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} e^{2\pi i\,\vec{x}\cdot(\ell+k\vec{n})}\ , \tag{2.18}$$

Получим аналитическую функцию

$$\begin{aligned} &\mathrm{CST}_{1/k}^{(-i\Omega)}(\vartheta_\ell^{\mathbb{R}}) = \\ &\quad = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\frac{\pi i}{k}\,(\ell+k\vec{n})\cdot\Omega\cdot(\ell+k\vec{n}) + 2\pi i\,(\ell+k\vec{n})\cdot\vec{z}\right) = \\ &\qquad\qquad = \vartheta_\ell(\vec{z},\Omega)\ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Остается лишь проинтерпретировать эту голоморфную функцию на $(\mathbb{C}^*)^g$ как голоморфное сечение линейного расслоения Θ на A, что мы и сделаем в следующем параграфе. А в заключение подчеркнем еще раз, что хотя классическая теория ϑ-функций насчитывает уже более 150 лет, описанное нами выше «сравнительное квантование» было проделано лишь совсем недавно в работе [26].

§ 5 Плоские голоморфные абелевы связности.

Линейное расслоение L принято задавать набором *функций перехода*, ассоциированных с конечным покрытием $\{U_i\}$ его базы. Функции перехода $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$ есть регулярные и обратимые комплексные функции на двойных пересечениях $U_i \cap U_j$, удовлетворяющие на тройных персечениях $U_i \cap U_j \cap U_k$ уравнению коцикла $f_{ij} \cdot f_{jk} \cdot f_{ki} = 1$. Два набора f_{ij}, f'_{ij} задают одинаковые расслоения, если существует набор регулярных и обратимых функций $\{\beta_i\}$, определенных на U_i, такой что $f'_{ij} = \beta_i f_{ij} \beta_j^{-1}$ на всех попарных пересечениях $U_i \cap U_j$. Естественно попытаться подыскать для данного L самый простой набор функций перехода: например, если это возможно, сделать все f'_{ij} константами.

Расслоение с постоянными функциями перехода называется *локальной системой коэффициентов*. Над любой односвязной открытой областью оно тривиализуется некоторым базисным сечением, и продолжение этого сечения вдоль петель на базе определяет характер $\pi_1 \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$ ее фундаментальной группы. Наоборот, каждый характер χ определяет голоморфное векторное расслоение — фактор по диагональному действию π_1:

$$\mathcal{U} \underset{\pi_1}{\times} \mathbb{C}^{\chi} = \frac{\mathcal{U} \times \mathbb{C}^{\chi}}{\pi_1}, \tag{2.20}$$

где $\mathcal{U}$ — это универсальная накрывающая базы с каноническим действием π_1, а $\mathbb{C}^{\chi} = \mathbb{C}$— одномерное представление π_1 с характером χ.

Если сопоставить набору функций перехода f_{ij} набор дифференциальных форм

$$\{f_{ij}^{-1}\, df_{ij}\}, \tag{2.21}$$

то мы получим коцикл из $H^{1,1} = H^1(\Omega)$, класс когомологий которого совпадает с первым классом Черна $c_1(L) \in H^{1,1}$. Если этот класс нулевой, то на U_i существуют дифференциальные формы h_i, такие что $h_i - h_j = f_{ij}^{-1}\, df_{ij}$. Этот набор дифференциальных форм h_i называется *голоморфной плоской связностью* на векторном расслоении L, ассоциированной с покрытием U_i.

Если такая связность задана, мы можем определить на каждом U_i функции β_i из уравнения

$$\beta_i^{-1}\, d\beta_i = h_i$$

и заменить функции перехода f_{ij} на $f'_{ij} = \beta_i f_{ij} \beta_j^{-1}$, которые постоянны, ибо $df'_{ij} = 0$.

Мы получаем классический результат:

Предложение 1 (А. Пуанкаре). *Топологически тривиальное линейное расслоение на кривой Σ обладает голоморфной плоской сязностью, и такие связности взаимно однозначно соответствуют характерам фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma) \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$.*

Таким образом, пространство $\mathcal{A}$ голоморфных плоских связностей на тривиальном расслоении совпадает с пространством характеров $\pi_1(\Sigma)$, т. е. с $2g$-мерным алгебраическим тором

$$\mathcal{A} = (\mathbb{C}^*)^{2g}.$$

Сопоставляя голоморфной плоской связности подлежащее ей голоморфное расслоение, мы получаем *забывающее отображение*:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{f} J(\Sigma)\ , \tag{2.22}$$

слой которого состоит из всех голоморфных плоских связностей на данном топологически тривиальном *голоморфном* расслоении. А так как разность любых двух таких связностей $\{h_i\}$, $\{h'_i\}$ одинаково ограничивается на $U_i \cap U_j$ с U_i и с U_j, эта разность склеивается в глобальное голоморфное сечение кокасательного расслоения кривой: $\{h_i\} - \{h'_i\} \in H^0(\mathcal{O}_\Sigma(K))$. Пространство таких сечений, по двойственности Серра, изоморфно $H^0(\mathcal{O}_\Sigma(K)) = H^1(\mathcal{O}_\Sigma)^*$, т. е. слою кокасательного расслоения $\Omega_{J(\Sigma)} = T^*J(\Sigma)$ к якобиану[1]. Иными словами, забывающее отображение (2.22) задает на пространстве характеров $\mathcal{A}$ структуру *афинного расслоения* над кокасательным расслоением $\Omega_{J(\Sigma)}$ к якобиану кривой.

[1]отметим, что кокасательное расслоение $\Omega_{J(\Sigma)}$ является тривиальным g-мерным векторным расслоением

Это означает, что над достаточно малым открытым $U_i \subset J$ мы можем зафиксировать некоторое «нулевое» сечение $\mathcal{A}$ над U_i и отождествить $\mathcal{A}|_{U_i}$ с $\Omega_J|_{U_i}$. Однако над пересечениями $U_i \cap U_j$ между этими сечениями может возникать нестыковка, и набор соответствующих разностей представляет собою 1-коцикл

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} \in H^1(J(\Sigma), \Omega) = H^2(J(\Sigma), \mathbb{C})$$

по лемме Дольбо. Классы нетривиальных аффинных расслоений над одним и тем же векторным расслоением взаимно однозначно соответствуют таким коциклам (в частности, если коцикл тривиален, аффинное расслоение совпадает с подлежащим векторным расслоением). В нашем случае имеет место

Предложение 2 (А. Пуанкаре). $\varepsilon_{\mathcal{A}} = [\Theta] = [\omega]$.

Для доказательства этого равенства и построения интерпретации, обещанной в § 4 главы 2, заметим, что из принципа максимума для компактного комплексного многообразия вытекает, что подпространство *унитарных характеров*[2] $U(1)^{2g} \subset (\mathbb{C}^*)^{2g} = \mathcal{A}$ является гладким (но не голоморфным!) глобальным[3] сечением аффинного расслоения (2.22), позволяющим гладко (но не голоморфно) отождествить якобиан $J(\Sigma)$ с тором $U(1)^{2g}$. Фиксация в $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = H_1(J_\Sigma, \mathbb{Z})$ симплектического базиса (2.11) выделяет в $\mathcal{A}$ два важных подпространства:

- *абелево пространство Шоттки*

$$S_g^a = (\mathbb{C}^*)^g = \{\chi \in (\mathbb{C}^*)^{2g} \mid \chi(a_i) = 1\} \; ; \tag{2.23}$$

[2] т. е. принимающих значения в $U(1) \subset \mathbb{C}^*$

[3] то, что ограничение забывающего отображения (2.22) на $U(1)^{2g} \subset (\mathbb{C}^*)^{2g}$ сюръективно отображает унитарные характеры на якобиан, доказывается применением проекции

$$(\mathbb{C}^*)^{2g} \xrightarrow{\arg} U(1)^{2g} \; : \quad z \longmapsto \frac{z}{|z|} \; ;$$

иначе говоря, на любом голоморфном линейном расслоении есть *эрмитова* плоская связность

- *абелево унитарное пространство Шоттки*

$$uS_g^a = (U(1))^g = \{\chi \in U(1)^{2g} \mid \chi(a_i) = 1\} \ . \tag{2.24}$$

Ограничивая забывающее отображение (2.22) на первое из них, мы получаем бесконечнолистное накрытие

$$S_g^a = (\mathbb{C}^*)^g \xrightarrow{f|_S} J(\Sigma)$$

с группой $\mathbb{Z}^g$, на которое Θ-расслоение поднимается тривиально:

$$(f|_S)^* \mathcal{O}_J(\Theta) = \mathcal{O}_{S_g^a},$$

так что голоморфные сечения $\mathcal{O}_J(\Theta)$ (т. е. ϑ-функции) превращаются в голоморфные функции на $(\mathbb{C}^*)^g$, преобразующиеся под действием $\pi_1(J)$ с надлежащими *множителями автоморфности*.

Если вернуться к обозначениям формул (2.10) – (2.12) из § 4 главы 2 (где $\vec{z}$ были комплексными координатами на универсальном накрытии $\mathcal{U} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^g$, матрица периодов A обозначалась через Ω и т. д.) и обозначить через $u_i \in \mathcal{U} = \mathbb{C}^g$ векторы, на которые сдвигается $\mathcal{U}$ под действием $a_i \in \pi_1(J)$, то действие $b_i \in \pi_1(J)$ на $\mathcal{U}$ будет состоять в сдвиге на вектор

$$u_{g+i} = \sum_{j=1}^{g} \Omega_{ij} u_j \ ,$$

а $H^0(J(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta))$ естественно отождествится с пространством голоморфных функций ϑ на $(\mathbb{C}^*)^g$, подъем которых на $\mathcal{U}$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} \vartheta(z + u_i) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z + u_{g+i}) &= e^{-2\pi k z_i - \pi i k\,\Omega_{ii}} \vartheta(z) \ . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Следовательно, произвольное сечение $\vartheta(z)$ имеет разложение

$$\vartheta(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^g / k\mathbb{Z}^g} c_\ell \cdot \vartheta_\ell(z) \ , \tag{2.26}$$

где $c_\ell \in \mathbb{C}$, а $\vartheta_\ell(z)$ есть ϑ-функции с характеристиками из (2.19).

§ 6 Полное квантование.

Итогом всего предыдущего служит

Теорема 1. *Главно поляризованные абелевы многообразия (а с ними и алгебраические кривые) допускают полное квантование в пространствах ϑ-функций.*

Приведем еще раз список действий, проделанных нами при построении этого полного квантования:

1) мы отождествили g-мерный тор $U(1)^g$ с нулевым сечением расслоения $A \xrightarrow{\pi} T^g_-$ и рассмотрели его комплексификацию $(\mathbb{C}^*)^g \supset U(1)^g$;

2) используя матрицу периодов Ω, ассоциированную с фиксированным симплектическим базисом в $H_1(A)$, мы построили преобразование когерентных состояний с дискретным временем

$$C^\infty(U(1)^g)' \xrightarrow{\mathrm{CST}^{(-i\Omega)}_{1/k}} L^2\left((\mathbb{C}^*)^g, d\nu_{\frac{1}{k}}\right) \cap \mathcal{H}\left((\mathbb{C}^*)^g\right)$$

и применили его к δ-функциям $\vartheta^{\mathbb{R}}_\ell$ бор-зоммерфельдовых точек на $U(1)^g$, заданных своими рядами Фурье (2.18); результатом стал набор $\{\vartheta_\ell(z,\Omega)\}$ голоморфных ϑ-функций с характеристиками на $(\mathbb{C}^*)^g$;

3) еще раз используя матрицу периодов Ω, мы построили накрытие $(\mathbb{C}^*)^g \longrightarrow J(\Sigma)$, на которое расслоение $\mathcal{O}_{J(\Sigma)}(k\Theta)$ поднимается тривиально, и отождествили пространство голоморфных сечений $H^0\left(J(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta)\right)$ с пространством голоморфных функций на $(\mathbb{C}^*)^g$, удовлетворяющих условиям автоморфности (2.25); при этом получилось то же самое пространство (даже те же ϑ-функции), что и на предыдущем шаге.

На этом история многообразий модулей топологически тривиальных векторных расслоенией ранга 1 над

алгебраическими кривыми = римановыми поверхностями сегодня заканчивается. Но алгебраической кривой можно сопоставить и другие многообразия модулей. Например, топологически тривиальных векторных расслоений ранга 2. Причем это сопоставление тоже будет точным модулярным соответствием. Интерес к такой неабелевой теории особенно подогревается тем, что она подлежит двумерной конформной теории поля.

Мы будем строить обобщение теории ϑ-функций на неабелев случай, следуя только что выписанной программе действий. При этом особенно важным для нас является следующее следствие сформулированной выше теоремы (ибо именно его доказательство в неабелевом случае будет нашей главной целью).

Следствие 1. *Пространства волновых функций* (2.7) *не зависят от выбора вещественной поляризации*[1] *«арифметического» типа*[2].

Конечно, в рамках классической теории ϑ-функций это замечание очевидно. Но для неабелевых ϑ-функций это утверждение означает важнейшее для конформной квантовой теории поля[3] и маломерной топологии «условие независимости», и его доказательство потребует от нас куда больших усилий, чем в абелевом случае.

Следует особо отметить, что $H^0(J(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta))$ является неприводимым представлением группы Гайзенберга Γ_k уровня k. Точнее, Γ_k действует на линейном расслоении $\mathcal{O}(k\Theta)$, и индуцированное представление в пространстве его голоморфных сечений является ее единственным (с точностью до проективизации) неприводимым представлением. Это обстоятельство составляет сердцевину классической теории ϑ-функций, и существование специального базиса в пространстве ϑ-фнкций обусловлено именно им: группа K в (2.2) является фактором Γ_k по мультипликативно вложенной подгруппе $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Свойство быть пространством единственного (с точностью до проективизации) неприводимого представления некоторой алгебры будет присуще и неабелевым ϑ-функциям. Только теперь та-

[1]а разложение (2.5) и проекция (2.6) лишь фиксируют специальные базисы в этих пространствах

[2]т. е. задаваемой формой ω, удовлетворяющей условию (2.4)

[3]на слэнге: CQFT

кой алгеброй будет калибровочная алгебра конформной квантовой теории поля Весса – Зумино – Виттена (WZW CQFT).

Глава 3. **НЕАБЕЛЕВЫ ϑ-ФУНКЦИИ**

Строгое модулярное соответствие

$$\Sigma_I \longmapsto \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I) \ , \tag{3.1}$$

которое сопоставляет алгебраической кривой многообразие модулей полустабильных голоморфных топологически тривиальных векторных расслоений ранга 2 на ней, стоит первым в ряду *некоммутативных* обобщений якобиана. Можно, разумеется, рассматривать и куда более сложные конструкции, однако, уже этому двумерному случаю вполне присущи все новые геометрические черты, появляющиеся в общей ситуации. В этой главе мы, следуя рецепту из § 5 главы 1, проквантуем риманову поверхность Σ при помощи строгого модулярного соответсвия (3.1). Для этого мы шаг за шагом повторим все построения из абелевой теории (т. е. классической теории ϑ-функций), проделаннные нами выше.

§ 1 Алгебраическая геометрия многообразий модулей векторных расслоений.

Алгебро-геометрическая часть теории неабелевых ϑ-функций была хорошо развита трудами Нарасимана, Бовиля, Ласло, Паули, Оксбери, Раманана, Сорджера и многих других. Новой составляющей неабелевой теории является важнейшее понятие *полустабильности*. Полустабильность двумерного топологически тривиального векторного расслоения E на кривой означает, что E не содержит линейных подрасслоений положительной степени[1]. Кроме этого, для работы с двумерными векторными расслоениями нужны некоторые сведения о строении когерентных пучков на алгебраических кривых[2] и кое-какая гомологическая алгебра[3]. Все необходимое может быть найдено в любом обзоре, посвященном этому предмету, например в [17].

Итак, рассмотрим многообразие $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma)$ модулей топологически тривиальных полустабильных голоморфных векторных расслоений ранга 2 над алгебраической кривой Σ. Напомним, что *нестабильные* полустабильные расслоения представлены на нем прямой суммой двух сопряженных топологически тривиальных линейных расслоений, а касательное пространство к $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma)$ в произвольной точке E имеет вид $T_E\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = H^1(\mathrm{Ad}(E))$, где

$$\mathrm{Ad}(E) \subset \mathrm{End}(E) = E^* \otimes E$$

это подрасслоение бесследных эндоморфизмов. Поскольку

$$H^0(\Sigma_I, \mathrm{Ad}E) = 0$$

для любого стабильного расслоения E, по теореме Римана– Роха имеем

$$\dim \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = \dim T_E\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = \dim H^1(\mathrm{Ad}(E)) = -\chi(\mathrm{Ad}(E)) = 3g - 3\ .$$

Определение неабелевых Θ-дивизоров параллельно конструкции из § 1 главы 2. Зафиксируем на Σ линейное расслоение σ степени $(g-1)$. Тогда[4]

$$\Theta = \Theta_\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{E \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma) \mid H^0(\Sigma, E(\sigma)) \neq 0\} \tag{3.2}$$

[1]т. е. $L \subset E$ с $c_1(L) > 0$

[2]любой когерентный пучок над гладкой алгебраической кривой распадается в прямую сумму локально свободного пучка (т. е. пучка сечений некоторого векторного расслоения) и пучка кручения с носителем в конечном множестве точек

[3]теорема Римана– Роха и первые когомологии пучков

[4]напомним, что на VBAC-сленге «подкрутка» $E \mapsto E(F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} E \otimes F$ есть тензорное умножение на локально свободный пучок F (обычно — на линейное расслоение)

является дивизором в $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Более того, как алгебраическое многообразие, дивизор Θ бирационально эквивалентен проективному пространству $\mathbb{P}^{3g-4}$.

Действительно, поскольку $c_1(E) = 0$, общее сечение $E(\sigma)$ для общего $E \in \Theta$ не имеет нулей, и откручивая его на $-\sigma$, мы можем представить E в виде расширения

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-\sigma) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(\sigma) \longrightarrow 0 \,. \tag{3.3}$$

А так как тривиальное расширение $E = \mathcal{O}(-\sigma) \oplus \mathcal{O}(\sigma)$ не полустабильно, наше расширение (3.3) определяется ненулевым коциклом из

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(\sigma), \mathcal{O}(-\sigma)) = H^1(\Sigma_I, \mathcal{O}(-2\sigma)) = \mathbb{C}^{3g-3}$$

(размерность вычислена по формуле Римана– Роха), причем изоморфным расслоениям отвечают пропорциональные коциклы. Поэтому, если сечение единственно (т. е. $\dim H^0(\Sigma, E(\sigma)) = 1$, что имеет место для общего[5] $E \in \Theta$), то E однозначно определяется точкой проективного пространства $\mathbb{P}H^1(\Sigma_I, \mathcal{O}(-2\sigma)) = \mathbb{P}^{3g-4}$.

Многообразие модулей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ и само близко к рациональному. Если в формуле (3.2) брать σ не из Pic_{g-1}, а из Pic_g, то мы получим

$$\dim H^0(\Sigma_I, E(\sigma)) \geqslant 2 \quad \forall\, E \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}\,,\ \forall\, \sigma \in \mathrm{Pic}_g(\Sigma)\,.$$

Из соображений размерности вытекает, что канонический гомоморфизм вычисления $\mathrm{can} \,:\, H^0(\Sigma_I, E(\sigma)) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow E(\sigma)$ инъективен почти для всех E (составляющих открытое по Зарисскому подмножество $M_0 \subset \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$) и определяет точную тройку

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{can}} E(\sigma) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathcal{O}_{p_i} \longrightarrow 0\,, \tag{3.4}$$

в которой $2g$ точек $\{p_1, p_2, \dots, p_{2g}\}$ составляют эффективный дивизор $p_1 + p_2 + \dots + p_{2g} \in |2\sigma| = \mathbb{P}H^0(\Sigma_I, \mathcal{O}(2\sigma)) = \mathbb{P}^g$, эквивалентный 2σ, потому что детерминант канонического гомоморфизма:

$$\mathcal{O} \xrightarrow{\;\wedge^2\mathrm{can}\;} \wedge^2\,(E(\sigma)) = \mathcal{O}(2\sigma)$$

[5] оценка размерности подпространства расслоений, допускающих несколько сечений или сечение с нулями является простым упражнением

(представляющий класс $c_1(E(\sigma))$) зануляется ровно на этом дивизоре.

Сопоставляя расслоению $E \in M_0$ дивизор $\sum p_i \in |2\sigma|$, получаем (очевидно, алгебраическое) отображение

$$M_0 \xrightarrow{\det} \mathbb{P}^g , \tag{3.5}$$

слой которого легко описать, ограничивая каноническую тройку (3.4) в точки p_i: над каждой из них одномерное подпространство

$$\ker \left(\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\ \mathrm{can}_{p_i}\ } E_{p_i} \right) \subset \mathbb{C}^2$$

задает точку $\gamma_i = \mathbb{P} \ker(\mathrm{can}_{p_i})$ на проективной прямой $\mathbb{P}\left(\mathbb{C}^2\right)$, и тем самым, слой отображения (3.5) представляет собой набор точек

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}\} \subset \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}H^0(\Sigma, E(\sigma)),$$

рассматриваемый с точностью до проективно линейного преобразования (отождествляющего $H^0(\Sigma, E(\sigma))$ с $\mathbb{C}^2$). Таким образом, отображение (3.5) является алгебраическим расслоением над g-мерной рациональной базой с $(2g-3)$-мерными рациональными слоями.

Предыдущее рассуждение работает и для векторных расслоений бóльшего ранга. Тем не менее, старинная проблема бирациональной геометрии:

рационально ли многообразие модулей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$

до сих пор остается открытой, несмотря на неослабевающие попытки ее решить.

Продолжая описание геометрии $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ по образцу предыдущей главы, имеем:

Определение 1. Пространство голоморфных сечений

$$\mathcal{H}_k = H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta))$$

называется пространством *неабелевых ϑ-функций уровня k.*

Предложение 1. $H^2(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Предложение 2. *Θ-дивизор обилен.*

Предложение 3 (Г. Фалтингс, 1992). *$H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta))$ является неприводимым представлением калибровочной алгебры конформной квантовой теории поля в модели Весса– Зумино– Виттена.*

Далее мы докажем все эти предложения.

§ 2 Голоморфные плоские связности.

До сих пор мы рассматривали векторные расслоения как локально свободные пучки. Вместе с тем, векторное расслоение ранга 2, как и линейное, можно задавать *матрицами перехода* α_{ij} между его тривиализациями над некоторым конечным покрытием базы: $\Sigma = \cup U_i$. Как и в § 5 главы 2, матричные функции $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$ должны быть регулярны и обратимы на попарных пересечениях $U_i \cap U_j$, а на тройных пересечениях $U_i \cap U_j \cap U_k$ удовлетворять уравнению 1-коцикла $\alpha_{ij} \cdot \alpha_{jk} \cdot \alpha_{ki} = 1$. Два коцикла α_{ij}, α'_{ij} задают одно и то же расслоение, если существует набор β_i матриц, регулярных и обратимых на U_i, такой что $\alpha'_{ij} = \beta_i \alpha_{ij} \beta_j^{-1}$. Однако, «простейший вид», к которому было бы интересно привести матрицы перехода, в неабелевом случае не столь однозначен.

Например, треугольным матрицам перехода отвечает представление расслоения в виде расширения (как в (3.3)), а постоянным — фиксация голоморфной плоской связности.

Набор матриц перехода производит набор матричных дифференциальных 1-форм $\{\alpha_{ij}^{-1} d\alpha_{ij}\} \in Z^1(\{U_i\})$, который является 1-коциклом со значениями в $\Omega(\mathrm{End}(E))$. Класс его когомологий $c(E) \in H^1(\Omega(\mathrm{End}(E)))$ называется *полным классом Черна*. При действии группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(E)$ на пространстве $H^1(\Omega(\mathrm{End}(E)))$ этот класс переходит в себя.

На кривой $H^1(\Omega(\mathrm{End}(E)))^* = H^0(\mathrm{End}(E))$ по двойственности Серра, и нетрудно проверить следующее

Предложение 1 (М. Атья). *Если* $\langle c(E), \sigma\rangle \neq 0$, *то* $\sigma^2 = \sigma$ *в* $H^0(\mathrm{End}(E))$.

Это простое наблюдение влечет массу структурных результатов о многомерных расслоениях. Поскольку расслоение $\mathrm{End}(E)$ расщепляется в прямую сумму тривиального линейного расслоения послойных гомотетий и расслоения бесследных эндоморфизмов:

$$\mathrm{End}(E) = \mathcal{O} \oplus \mathrm{Ad}(E)\,,$$

возникает разложение

$$\Omega(\mathrm{End}(E)) = \Omega \oplus (\mathrm{Ad}(E) \otimes \Omega)\ , \tag{3.6}$$

в котором проекция на первое слагаемое сопоставляет эндоморфизму его след. В частности, если в $H^0(\mathrm{End}(E))$ есть один идемпотент, то существует и второй, и тогда E должно быть прямой суммой двух линейных расслоений.

Расслоение называется *неразложимым*, если оно не распадается в прямую сумму двух собственных подрасслоений:

$$E \neq E_1 \oplus E_2\ .$$

Алгебра $H^0(\mathrm{End}(E))$ неразложимого расслоения E не содержит идемпотентов, т. е. $H^0(\mathrm{Ad}(E)) = H^1(\mathrm{Ad}(E) \otimes \Omega) = 0$, так что

$$c(E) = \mathrm{tr} c(E) \in H^1(\Omega)\ .$$

Если, как и выше, представить $c(E)$ коцепью $\{\alpha_{ij}^{-1}\, d\alpha_{ij}\}$, то согласно изоморфизму Дольбо,

$$\mathrm{tr}(\alpha_{ij}^{-1} d\alpha_{ij}) \in H^1(\Sigma, \Omega) \subset H^2(\Sigma, \mathbb{C}),$$

и формальное матричное вычисление

$$\mathrm{tr}(\alpha_{ij}^{-1}\, d\alpha_{ij}) = (\det \|\alpha_{ij}\|)^{-1}\, d \det \|\alpha_{ij}\|$$

показывает, что для любого неразложимого расслоения E на кривой

$$c(E) = c_1(\det E) = c_1(E) \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z}) \subset H^2(\Sigma, \mathbb{C})\ , \tag{3.7}$$

и если оно тривиально (как в рассматриваемом нами случае топологически тривиальных расслоений), то

$$\alpha_{ij}^{-1}\, d\alpha_{ij} = h_i - h_j \tag{3.8}$$

для некоторого набора матричных дифференциальных 1-форм h_i на U_i.

Определение 1. Набор матричных 1-форм (3.8), кограницей которого является коцикл (3.7), называется *голоморфной плоской связностью* на расслоении E, ассоциированной с набором матриц перехода α_{ij}.

Имея такой набор, мы можем решить на каждом U_i уравнение $\beta_i^{-1}\, d\beta_i = h_i$ и перейти к эквивалентному коциклу $\alpha'_{ij} = \beta_i\, \alpha_{ij}\, \beta_j^{-1}$, матрицы которого удовлетворяют условию $d\alpha'_{ij} = 0$, т. е. постоянны. Расслоение с постоянными матрицами перехода называется *локальной системой коэффициентов*. Над любым односвязным открытым множеством оно тривиализуется, и тем самым, определяет класс эквивалентных (относительно присоединенного действия $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$) представлений

$$\pi_1 \xrightarrow{\varrho} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \tag{3.9}$$

фундаментальной группы базы. Обратно, каждый класс эквивалентных представлений (3.9) обычным образом[1] определяет расслоение с голоморфной плоской связностью

$$E = \mathcal{U} \underset{\pi_1}{\times} \mathbb{C}^2 \tag{3.10}$$

(фактор по диагональному действию π_1 автоморфизмами универсальной накрывающей $\mathcal{U}$ базы и операторами $\varrho(\pi_1)$ на $\mathbb{C}^2$).

Мы доказали классический результат:

Предложение 2 (А. Вейль[2]). *На топологически тривиальном двумерном векторном расслоении над римановой поверхностью* Σ

[1] ср. с (2.20)

[2] отметим, что в ключевой работе [80] А. Вейль ввел понятие *класса матричных дивизоров*, эквивалентное современному понятию «векторное расслоение», и не только доказал это предложение, но и высказал идею, что векторные расслоения старших рангов доставляют неабелевы аналоги якобианов

имеется голоморфная плоская связность, и пространство $\mathcal{A}_{\text{NA}}$ *всех таких связностей совпадает с пространством*

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$$

классов эквивалентных представлений $\pi_1(\Sigma)$ *в* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Разумеется, расслоение (3.10) может оказаться нестабильным или неразложимым полустабильным. Мы исключим их из рассмотрения и обозначим через

$$\mathcal{A}_{\text{NA}}^{\text{ss}} \subset \mathcal{A}_{\text{NA}} = \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$$

пространство классов представлений (и соответствующих им голоморфных плоских связностей), дающих стабильные или полустабильные разложимые расслоения.

Поскольку $h_i - h_i'$ и $h_j - h_j'$ одинаково оганичиваются на $U_i \cap U_j$, разность двух голоморфных плоских связностей

$$\{h_i\} - \{h_i'\} \in H^0(\Omega \otimes \mathrm{End}(E))$$

задает глобальное сечение расслоения $\Omega \otimes \mathrm{End}(E)$. Такое сечение представляет собою гомоморфизм $E \xrightarrow{\phi} E \otimes \Omega$ и называется[3] *полем Хиггса*. В нашем случае (топологически тривиальное неразложимое расслоение ранга 2) поле Хиггса необходимо является *бесследным*, т. е.

$$\phi \in H^0(\Sigma, \mathrm{Ad}(E) \otimes K) \;, \tag{3.11}$$

и, по двойственности Серра: $H^0(\mathrm{Ad}(E) \otimes K) = H^1(\mathrm{Ad}(E))^*$, пространство бесследных полей Хиггса на E канонически изоморфно слою кокасательного расслоения $\Omega_{\mathcal{M}^{\text{ss}}}$ к многообразию модулей $\mathcal{M}^{\text{ss}}$ в точке E. Таким образом, забывающее отображение

$$\mathcal{A}_{\text{NA}}^{\text{ss}} \xrightarrow{f} \mathcal{M}^{\text{ss}} \tag{3.12}$$

[3]в случае расслоений над кривой,где $\Omega_\Sigma = K_\Sigma$

(слой которого — пространство голоморфных плоских связностей на данном голоморфном расслоении) является аффинным расслоением над кокасательным расслоением $\Omega_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}$ (ср. с (2.22)). Как мы видели на стр. 42, такое расслоение задается чеховским коциклом

$$\varepsilon_{\mathrm{NA}} \in H^1(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, \Omega_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}) = H^{1,1}(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, \mathbb{C})$$

разностей локальных сечений аффинного расслоения над пересечениями карт.

Как и в абелевом случае, справедливо

Предложение 3. $\varepsilon_{\mathrm{NA}} = [\Theta]$.

Как и в предыдущей главе, мы будем доказывать его при помощи выбора специального неголоморфного сечения аффинного расслоения (3.12) (см. стр. 42–44). Из принципа максимума на компактной кривой Σ снова вытекает, что подпространство унитарных представлений

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) \subset \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$$

является гладким (но не голоморфным) сечением аффинного расслоения (3.12), однако, теперь, в неабелевом случае, далеко не очевидно, что это — *глобальное* сечение, т. е. что забывающая проекция f отображает $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))$ *на все* $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$: всякое ли полустабильное расслоение допускает плоскую *эрмитову* связность?

Чуть позже мы детально проанализируем этот вопрос и покажем, что ограничение забывающего отображения на унитарные характеры дает *изоморфизм Нарасимана– Шешадри*:

$$\mathrm{NS} : \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} . \tag{3.13}$$

Далее, зафиксируем стандартную систему образующих фундаментальной группы

$$\pi_1(\Sigma) = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_g \, , \, b_1, b_2, \ldots, b_g \mid \quad \prod_{i=1}^{g} [\, a_i \, , \, b_i \,] = 1 \right\rangle$$

и рассмотрим индуцированные этим выбором

- *неабелево комплексное пространство Шоттки*, имеющее вещественную размерность $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = 6g - 6$:

$$S_g = \{\varrho \in \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \mid \varrho(a_i) = 1\} = \\ = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^g / \mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \ ;$$

(где «$/\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}$» — факторизация по диагональному действию сопряжениями).

- *неабелево унитарное пространство Шоттки*, имеющее вещественную размерность $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}/2 = 3g - 3$:

$$S_g^{\mathrm{u}} = \{\varrho \in \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) \mid \varrho(a_i) = 1\} = \\ = S_g \cap \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)).$$

В абелевом случае ограничение отображения f на комплексное пространство Шоттки давало нам накрытие, превращающее сечения Θ-расслоения на якобиане в голоморфные функции на пространстве Шоттки. В неабелевом случае ситуация гораздо сложнее: ограничение

$$S_g \xrightarrow{f|_{S_g}} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma) \tag{3.14}$$

всего лишь мероморфно (его образ содержит нестабильные расслоения даже для униформизации Шоттки кривой), а его свойства до сих пор полностью не изучены. Недавно К. Флорентино доказал, что его дифференциал невырожден вдоль унитарного пространства Шоттки, а в § 6 главы 9 мы покажем, что для общей кривой Σ его образ плотен в $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma)$ по Зарисскому.

Чтобы обойти это белое пятно, нам понадобится довольно продвинутая симплектическая и лагранжева геометрия, усиленная весьма изощренным анализом.

§ 3 Многообразия модулей стабильных пар и разрешение особенностей.

Многообразия $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ были построены в шестидесятых годах, прежде всего в работах Д. Мамфорда и в трудах бомбейского Тата - института. Новые методы калибровочной геометрии позволяют включить эти многообразия в цепочку *многообразий модулей стабильных пар*, связанных последовательными бирациональными преобразованиями — *флипами*, что было использовано в работах Таддеуша, Бертрама и Бредлоу – Даскалопулоса для вычислений их колец когомологий и в работе Шешадри ([62]) для разрешения особенностей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$.

Итак, новым объектом изучения является пара

$$(E, \mathcal{O} \xrightarrow{s} E), \tag{3.15}$$

состоящая из векторного расслоения E на кривой Σ и его ненулевого голоморфного сечения s. С. Бредлоу определил для таких пар новое условие стабильности и доказал теорему, связывающую стабильные пары с решениями *уравнения вихря*[1] на Σ. Уравнение вихря зависит от положительного вещественного параметра t, и новое условие стабильности тоже включает в себя этот параметр. А поскольку $E \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ не имеют ненулевых голоморфных сечений, нам придется подкрутить все наши расслоения на некоторое положительное линейное расслоение так, чтобы иметь

$$\det E = D \quad \text{с} \quad \deg D = d > 0\ . \tag{3.16}$$

Для двумерных расслоений E, удовлетворяющих (3.16), новое условие стабильности формулируется следующим образом: пара (E, s) из (3.15) называется *полустабильной*, если для любого ли-

[1]уравнение вихря требует фиксации на Σ не только конформной структуры, но келеровой метрики; в алгебро-геометрической интерпретаци, которую мы здесь рассматриваем, келерова метрика нормализуется так, чтобы объем $\mathrm{Vol}(\Sigma) = 4\,\pi$

нейного подрасслоения $L \subset E$ выполняется неравенство

$$\deg L \leqslant \frac{d}{2} - t \text{ , если } s(\mathcal{O}) \subset L \text{ ,}$$
$$\deg L \leqslant \frac{d}{2} + t \text{ , если } s(\mathcal{O}) \not\subset L \text{ .}$$

Основы теории стабильных пар могут быть найдены в [14], [13], [67]. Легко видеть, что многообразия модулей полустабильных пар $M(D,t)$ имеют следующие свойства:

1) $M(D,t) \neq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad t \leqslant d/2$;

2) если t иррационально, то $M(D,t)$ компактно;

3) $(E,s) \in M(D,t) \quad \Longrightarrow \quad (E(\xi), s(\xi)) \in M(D(\xi),t)$ для любого эффективного дивизора ξ ;

а сами полустабильные пары обладают свойствами:

1) всякий гомоморфизм $E_1 \xrightarrow{\phi} E_2$ пар $(E_i, s_i) \in M(D,t)$, такой что $\phi(s_1) = s_2$, является изоморфизмом;

2) если $(E,s) \in M(D,t)$, то никакой эндоморфизм E, кроме нулевого, не аннулирует s, и никакой эндоморфизм E, кроме тождественного, не сохраняет s.

При иррациональном t (а мы сконцентрируем свое внимание именно на таких многообразиях модулей) теория деформаций пары $(E,s) \in M(D,t)$ тоже очень проста. Сечение s определяет естественную точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^0(\mathrm{Ad}(E)) \longrightarrow H^0(E) \longrightarrow T_{(E,s)}M(D,t) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(\mathrm{Ad}(E)) \longrightarrow H^1(E) \text{ ,}$$

из которой $\mathrm{rk}\left(T_{(E,s)}M(D,t)\right) = d - g - 2 \;\forall\; (E,s) \in M(D,t)$, так что пространство $M(D,t)$ для иррационального t гладко. Более точно, многообразия модулей $M(D,t_i)$ гладки и компактны для всех $\max\big(0,(-i-1+d/2)\big) < t_i < \max\big(0,(-i+d/2)\big)$, и при проходе через границу интервала многообразие модулей испытывает флип[2] (чем мы еще воспользуемся).

Для расслоений большего ранга условие стабильности видоизменяется так: пара (E,s) называется полустабильной, если для любого собственного подрасслоения $E_1 \subset E$ выполняется неравенство

$$\mu(E_1) \leqslant \mu(E) - t \text{ , если } s(\mathcal{O}) \subset E_1 \text{ ,}$$
$$\mu(E_1) \leqslant \mu(E) + t \text{ , если } s(\mathcal{O}) \not\subset E_1 \text{ ,}$$

где $\mu(E) = \deg(\det E)/\mathrm{rk}(E)$ есть так называемый *наклон расслоения*. При этом все перечисленные выше утверждения сохраняют силу (см. [14]).

Многомерные стабильные пары нужны нам для того, чтобы разрешить особенности многообразия модулей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Рассмотрим множество пар $(\mathrm{End}(E), s)$, где $E \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, $s \in H^0(\mathrm{End}(E))$. Для стабильного E расслоение $\mathrm{End}(E)$ имеет ровно одно ненулевое сечение (его образом является линейное расслоение гомотетий), но для полустабильного E возможны два случая:

$$\dim H^0(\mathrm{End}(E)) = 2,\ 4 \text{ .}$$

Таким образом, гладкое компактное многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ss}} = M_t$ модулей полустабильных пар $(\mathrm{End}(E), s)$ при t, близком к 0, вместе с естественной бирациональной проекцией на $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ *разрешает* особые полустабильные точки на $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Ниже в тексте мы всегда будем ссылаться на эту конструкцию как на *каноническую десингуляризацию*[3] $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$.

[2] см. [61]

[3] впервые она была построена Шешадри в [62], где он получает то же самое разрешение $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ss}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, фиксируя на векторном расслоении подходящую *параболическую структуру* над некоторой точкой кривой

§ 4 Голоморфная симплектическая геометрия полей Хиггса.

Возвращаясь к полям Хиггса (3.11), мы видим, что все пары (E, ϕ), где $E \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, а $\phi : E \longrightarrow E \otimes K_\Sigma$ — бесследное хиггсово поле, составляют кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Сопоставляя такой паре (E, ϕ) голоморфный квадратичный дифференциал:

$$\wedge^2\phi \, : \, \mathcal{O} \longrightarrow \wedge^2 (E \otimes K_\Sigma) = K_\Sigma^2 \, ,$$

мы получаем голоморфное отображение

$$T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\pi} H^0(\Sigma, K_\Sigma^2) \, . \tag{3.17}$$

На всяком кокасательном расслоении имеется каноническая *форма действия*. В данном случае это будет *голоморфная* 1-форма α, и ее голоморфный дифференциал $\Omega = d\alpha$ задает на $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ голоморфную симплектическую структуру. Продолжая аналогию с вещественной симплектической геометрией, мы можем рассмотреть голоморфный аналог вполне интегрируемой системы: голоморфную проекцию голоморфного симплектического многообразия с лагранжевыми слоями над общей точкой базы, являющимися комплексными торами (абелевыми многообразиями) срединной размерности. Замечательное наблюдение Н. Хитчина состоит в том, что отображение (3.17) представляет собой именно такую голоморфно интегрируемую систему, причем $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ можно слегка расширить до голоморфного симплектического многообразия так, чтобы слои π стали компактными.

Определение 1. Пара Хиггса (E, ϕ) называется *стабильной парой Хиггса*, если E не содержит ϕ-инвариантных линейных расслоений $L \in E$ положительной степени, т. е. $\phi(L) \not\subset L \otimes K_\Sigma$ для любого $0 \neq L \subsetneq E$ с $\deg L > 0$.

Можно «в лоб» показать (см. [39]), что многообразие $\mathcal{M}^{\mathrm{H}}$ модулей стабильных пар Хиггса содержит кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ в качестве плотного по Зарисскому подмножества и отличается от него лишь в коразмерности 2, так что мы можем применять принцип Хартогса. Более того, каноническая голоморфная симплектическая форма на $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ и проекция (3.17) продолжаются на $\mathcal{M}^{\mathrm{H}}$ до симплектической формы (которую мы также обозначим Ω) и голоморфного отображения моментов

$$\mathcal{M}^{\mathrm{H}} \xrightarrow{\pi} H^0(\Sigma, \mathcal{O}(2K_\Sigma)) \tag{3.18}$$

с компактными слоями. Мы же ограничимся здесь лишь описанием общего слоя отображения π.

Общее бесследное поле Хиггса $\phi \in H^0(\mathrm{Ad}(E) \otimes K_\Sigma)$ индуцирует бирациональный эндоморфизм

$$\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}(E \otimes K) = \mathbb{P}(E)$$

проективизации двумерного векторного расслоения E, и в каждой точке $p \in \Sigma$ его ограничение $\mathbb{P}(E_p) \xrightarrow{\phi_p} \mathbb{P}(E_p)$ на слой над этой точкой либо является автоморфизмом $\mathbb{P}_1$ с двумя различными неподвижными точками $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{P}(E_p)$, либо стягивает $\mathbb{P}_1$ в одну точку $\gamma \in \mathbb{P}(E_p)$. Мы получаем двойное накрытие

$$\widetilde{\Sigma}_\phi \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \Sigma \tag{3.19}$$

с дивизором ветвления $\xi_\phi = \left(\wedge^2\phi\right)_0 \in |2K_\Sigma|$. Накрывающая кривая $\widetilde{\Sigma}_\phi$, лежащая на линейчатой поверхности $\mathbb{P}(E)$, называется *спектральной кривой*. Подкручивая точную последовательность присоединения

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-\widetilde{\Sigma}_\phi) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_\phi} \longrightarrow 0$$

на линейное расслоение Гротендика $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$, мы получаем точную тройку

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-\widetilde{\Sigma}_\phi) \otimes H \longrightarrow H \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_\phi}(H) \longrightarrow 0\,, \tag{3.20}$$

прямой образ которой относительно проекции $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \Sigma$ доставляет изоморфизм[1]

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\sim} R^0\mathrm{pr}_*\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_\phi}(H) \longrightarrow 0\,.$$

[1]напомним, что $R^0\mathrm{pr}_*(H) = E$, $R^1\mathrm{pr}_*(H) = 0$, а при ограничении на слой $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-\widetilde{\Sigma}_\phi)(H)|_{\mathbb{P}(E_p)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$

Таким образом, исходное векторное расслоение E индуцирует на спектральной кривой $\widetilde{\Sigma}_\phi$ линейное расслоение $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_\phi}(H) \in \mathrm{Pic}(\widetilde{\Sigma}_\phi)$.

Напомним, что прообраз нуля относительно норменного отображения

$$J(\widetilde{\Sigma}_\phi) \xrightarrow{N_\phi} J(\Sigma)$$

двойного накрытия (3.19) связен и является, таким образом, абелевым многообразием. Оно называется *многообразием Прима* и обозначается

$$\mathrm{Prym}_\phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} N_\phi^{-1}(0) \ .$$

И поскольку, согласно (3.20), $N_\phi\left(\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_\phi}(H)\right) = \wedge^2 E = \mathcal{O}$, мы имеем включение $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_\phi}(H) \in \mathrm{Prym}_\phi$.

С другой стороны, по общему квадратичному дифференциалу $w \in H^0(\Sigma, \mathcal{O}(2K_\Sigma))$ можно построить неприводимое двойное накрытие

$$\widetilde{\Sigma}_w \xrightarrow{\phi_w} \Sigma \ ,$$

разветвленное в дивизоре его нулей $(w)_0 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{4g-4}\}$, а с каждым $L \in \mathrm{Prym}_{\phi_w}$ можно связать векторное расслоение

$$E_L = R^0 \phi_{w*}(L)$$

на Σ. Легко видеть, что $\mathrm{rk} E_L = 2$, $\wedge^2 E_L = \mathcal{O}$, и (E_L, ϕ_w) является стабильной парой Хиггса. Таким образом,

$$\pi^{-1}(w) = \mathrm{Prym}_{\phi_w} \ .$$

§ 5 Калибровочная теория на римановой поверхности.

Новый прием, пришедший в геометрию из теории поля, состоит в сопоставлении объектов разной размерности. Например, трехмерная теория на ограничиваемом римановой поверхностью теле с ручками доставляет важнейшую информацию для двумерной теории на самой поверхности, а другие полезные факты можно получать из теории на ассоциированных с римановой поверхностью графах (одномерных комплексах).

Классическая полевая теория над многообразием M включает в себя три составляющие:

- набор *полей* $\mathcal{A}$ на M — это геометрические объекты, такие как сечения векторных расслоений или связности на них, или отображения из M в некоторые вспомогательные многообразия и т. п.;
- *функционал действия* $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ — обычно это интеграл от некоторой функции L (лагранжиана) от полей;
- набор *наблюдаемых* — функционалов $w : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ на пространстве полей.

Например, в *теории Черна–Саймонса* на трехмерном многообразии M полевыми переменными являются 1-формы с коэффициентами в алгебре Ли $\mathcal{A} = \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{su}(2)$, а функционал действия[1] имеет вид

$$\mathrm{cs}(a) = \frac{\pi^2}{8} \int\limits_M \mathrm{tr}\Big(a\,da + \frac{2}{3}\,a \wedge a \wedge a\Big)\,. \tag{3.21}$$

В качестве наблюдаемых величин можно рассмотреть *петли Уилсона*: $W_K(a) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hol}_K(a))$ — следы[2] голономии связности a вдоль узлов $K \subset M$.

[1] так называемый *функционал Черна - Саймонса*

[2] тождество Мандельстама: $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(A^{-1}B)$ показывает, что такие наблюдаемые образуют алгебру

Обратимся теперь к пространству $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), SU(2))$ классов унитарных представлений фундаментальной группы римановой поверхности Σ рода g. Чтобы превратить его в фазовое пространство полевой теории, мы будем считать, что $g > 2$, и обозначим через $E_h = \Sigma \times \mathbb{C}^2$ тривиальное *эрмитово* векторное расслоение ранга 2 на Σ. Рассмотрим аффинное пространство[3] $\mathcal{A}_h$ эрмитовых связностей на E_h с действием калибровочной группы $\mathcal{G}_h$ гладких эрмитовых автоморфизмов слоев. На E_h имеется выделенная *нулевая связность* $\vartheta = d$, позволяющая отождествить $\mathcal{A}_h$ с $\Omega^1(\mathrm{End}(E_h))$, сопоставляя связности a 1-форму $a - \vartheta$, и мы часто будем отождествлять формы и связности таким образом. Обозначим через $\mathcal{A}_h^{\mathrm{red}} \subset \mathcal{A}_h$ подпространство приводимых связностей, и пусть $\mathcal{A}_h^{\mathrm{irr}} = \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{A}_h^{\mathrm{red}}$.

Пространство $\mathcal{A}_h = \Omega^1(\mathrm{End}(E_h))$ является пространством полей теории Янга–Миллса, действие в которой задается *функционалом Янга–Миллса*: $S(a) = \displaystyle\int_\Sigma |F_a|^2$, где F_a — кривизна связности a. Сопоставляя связности ее тензор кривизны, мы получаем $\mathcal{G}_h$-эквивариантное *отображение моментов* в коалгебру Ли $\mathfrak{L}(\mathcal{G}_h)^*$ калибровочной группы:

$$F \,:\, \mathcal{A}(E_h) \xrightarrow{a \mapsto F_a} \Omega^2(\mathrm{End}(E_h)) = \mathfrak{L}(\mathcal{G}_h)^* \,, \tag{3.22}$$

нулевым уровнем которого является пространство плоских связностей

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F &= F^{-1}(0) \,, \\ T_a\mathcal{A}_F &= \{\gamma \in \Omega^1(\mathrm{End}(E_h)) \mid \nabla_a \gamma = 0\} \,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Мы видим, в частности, что пространство $\mathcal{A}_F$ состоит из классических решений *уравнения Эйлера–Лагранжа*: $\delta S(a) = 0$.

На пространстве $\mathcal{A}_h$ имеется каноническая $\mathcal{G}_h$-инвариантная симплектическая структура

$$\Omega(\gamma_1, \gamma_2) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \,, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in T_a\mathcal{A}_h = \Omega^1(\mathrm{End}(E_h)). \tag{3.24}$$

[3] над векторным пространством $\Omega^1(\mathrm{End}E_h)$

Ее ограничение на $\mathcal{A}_F$ вырождается в точности вдоль орбит $\mathcal{G}_h$, поскольку $T\mathcal{G}_h \subset T_a\mathcal{A}_h$ совпадает с образом

$$\nabla_a\left(\mathfrak{L}(\mathcal{G}_h)\right) = \nabla_a\left(\Omega^0(\mathrm{End}(E_h))\right) \subset \Omega^1(\mathrm{End}(E_h)) ,$$

и для любых $\xi \in \Omega^0(\mathrm{End}(E_h))$ и $\gamma \in T_a\mathcal{A}_F$ (см. (3.23)) имеем равенство: $\Omega(\nabla_a\xi, \gamma) = \Omega(\xi, \nabla_a\gamma)$.

Таким образом, симплектическая редукция пространства $\mathcal{A}_h$ по действию калибровочной группы при помощи отображения моментов (3.22) наделяет пространство орбит

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) = \mathcal{A}_F/\mathcal{G}_h = \mathcal{A}_h//\mathcal{G}_h \tag{3.25}$$

симплектической структурой[4] Ω над подпространством классов стабильных неприводимых представлений

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))^{\mathrm{irr}} \subset \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))$$

и структурой симплектического орбифолда над полустабильными разложимыми представлениями

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))^{\mathrm{red}} \subset \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) .$$

Форма (3.24) является дифференциалом 1-формы действия:

$$D(\gamma) = \int_\Sigma \mathrm{tr}(a \wedge \gamma) , \tag{3.26}$$

которая задает унитарную связность A_0 на тривиальном главном $U(1)$-расслоении L_0 над $\mathcal{A}_h$. Пара (L_0, A_0) спускается на пространство орбит (3.25) при помощи Θ-торсора[5] — функции

$$\mathcal{A}_h \times \mathcal{G}_h \xrightarrow{\Theta} U(1) \ : \quad \Theta(a, g_1g_2) = \Theta(a, g_1)\Theta(a^{g_1}, g_2) , \tag{3.27}$$

которая определяется следующим образом: $\forall\ (a, g) \in \mathcal{A}_h \times \mathcal{G}_h$ существует гладкое трехмерное многообразие Y с $\partial Y = \Sigma$, SU(2)-связность A на тривиальном векторном расслоении $\mathcal{E}$ над Y и ее

[4]подчеркнем, что эта симплектическая структура определяется в чисто топологических терминах; подробности см. в [34]

[5]см. [60]

калибровочное преобразование G такие, что $A|_\Sigma = a$, $G|_\Sigma = g$; тогда

$$\Theta(a,g) = e^{i(\mathrm{cs}(A^G) - \mathrm{cs}(A))}\,, \tag{3.28}$$

где $\mathrm{cs}(A)$ — функционал Черна– Саймонса (3.21) на пространстве $\mathcal{A}(\mathcal{E}_h)$ унитарных связностей на тривиальном двумерном векторном расслоении[6]. Дифференциал функции Θ в точке (a,g) сопоставляет паре касательных векторов $\gamma \in T_a\mathcal{A}_h = \Omega^1(\mathrm{End}(E_h))$, $\xi \in \mathfrak{L}(\mathcal{G}_h) = \Omega^0(\mathrm{End}(E_h))$ число

$$\frac{\pi i}{4}\,\Theta \int\limits_\Sigma \left(\mathrm{tr}(g^{-1}\,dg \wedge g^{-1}\gamma g) - \mathrm{tr}(a \wedge \nabla_{a^g}\xi) + 2\,\mathrm{tr}(F_{a^g} \wedge \xi)\right)\,,$$

и его ограничение на подпространство плоских связностей имеет вид:

$$d\Theta(\gamma,\xi) = \frac{\pi i}{4}\,\Theta \int\limits_\Sigma \mathrm{tr}\left(g^{-1}dg \wedge g^{-1}\gamma g\right)\,,$$

т. е. не зависит от второй координаты.

Торсор (3.27) задает на пространстве орбит $\mathcal{A}_h/\mathcal{G}_h$ главное $U(1)$-расслоение

$$S^1(L) = \mathcal{A}_h \underset{\mathcal{G}_h}{\times} U(1) \tag{3.29}$$

(фактор по действию $g\,:\,\ (a,z) \longmapsto (a^g, \Theta(a,g)z)\,,\ g \in \mathcal{G}_h$). Обозначим через L эрмитово линейное расслоение над $\mathcal{A}_F$, ассоциированное с ограничением $S^1(L)|_{\mathcal{A}_F}$ этого главного расслоения на подпространство плоских связностей. Следуя [60], можно проверить, что форма действия (3.26) задает на L эрмитову $U(1)$-связность A_{cs} с формой кривизны

$$F_{A_{\mathrm{cs}}} = i \cdot \Omega\,, \tag{3.30}$$

где Ω — симплектическая структура на $\mathcal{A}_F/\mathcal{G}_h = \mathcal{A}_h//\mathcal{G}_h$, описанная на стр. 66. Итак, четверка

$$(\,\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))\,,\ \Omega\,,\ L\,,\ A_{\mathrm{cs}}\,) \tag{3.31}$$

[6]можно проверить (см. [60, §2]), что функция (3.28) не зависит от выбора тройки (Y, A, G)

представляет собою данные *геометрического предквантования* из § 1 главы 1.

§ 6 Комплексная поляризация пространства $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))$.

Стандартный способ задания комплексной поляризации пространства классов представлений — это фиксация комплексной структуры I на Σ. Напомним, что каждая связность $a \in \mathcal{A}$ определяет дифференциальный оператор первого порядка — *ковариантную производную* $\nabla_a : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E \otimes T^*X)$, главной частью которого является обычный внешний дифференциал d. Комплексная структура I на Σ индуцирует разложения $d = \partial + \overline{\partial}$ и $\nabla_a = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$, где

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^{1,0}} \Gamma(E \otimes \Omega^{1,0}) \qquad \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^{0,1}} \Gamma(E \otimes \Omega^{0,1}) \ ,$$

так что пространство всех связностей раскладывается в прямое произведение

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'', \tag{3.32}$$

где $\mathcal{A}'$ — аффинное пространство над $\Omega^{1,0}(\mathrm{Ad}(E))$, а $\mathcal{A}''$ — над $\Omega^{0,1}(\mathrm{Ad}(E))$. Калибровочная группа $\mathcal{G}$ всех гладких послойных автоморфизмов расслоения E сохраняет проекцию

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathcal{A}'' \tag{3.33}$$

на пространство $\overline{\partial}$-операторов на E.

Задание на E какой-либо эрмитовой структуры h выделяет подпространство *эрмитовых* связностей $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$, и ограничение проекции (3.33) на $\mathcal{A}_h$ является взаимно однозначным соответствием. Кроме того, h определяет на калибровочной группе $\mathcal{G}$ сопряжение:

$$g \longmapsto \overline{g} = (g^*)^{-1} \ ,$$

вещественными элементами которого являются послойные эрмитовы автоморфизмы:

$$\mathcal{G}_h = \{g \in \mathcal{G} \mid \overline{g} = g\} \ .$$

При этом действие $a \longmapsto g(a)$ произвольного калибровочного преобразования $g \in \mathcal{G}$ на компоненты связности a описывается формулами:

$$\nabla^{1,0}_{g(a)} = \overline{g} \cdot \nabla^{1,0}_a \cdot \overline{g}^{-1} = \nabla^{1,0}_a - \left((\nabla^{1,0}_a g) \cdot g^{-1}\right)^*$$
$$\nabla^{0,1}_{g(a)} = g \cdot \nabla^{0,1}_a \cdot g^{-1} = \nabla^{0,1}_a - (\nabla^{0,1}_a g) \cdot g^{-1}$$

и сохраняет подпространство $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ эрмитовых связностей, а отождествление $\mathrm{pr}|_{\mathcal{A}_h} : \mathcal{A}_h \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}''$ эквивариантно относительно этого действия.

Поскольку композиция $\left(\nabla^{0,1}_a\right)^2 \in \Omega^{0,2}(\mathrm{Ad}(E)) = 0$, пространство орбит

$$\mathcal{A}''/\mathcal{G} = \bigcup \mathcal{M}_i \tag{3.34}$$

представляет собой объединение всех компонент пространства[1] модулей топологически тривиальных I-голоморфных расслоений на Σ_I, и орбиты плоских связностей $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}_h$ составляют в нем компоненту максимальной размерности $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ классов полустабильных расслоений (напомним, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = 3g-3$). Применение классической геометрической теории инвариантов в стиле Кемпфа – Несс дает нам:

Предложение 1 (Нарасиман – Шешадри). *Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{NS} : \mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \ , \tag{3.35}$$

индуцирующий на $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))$ *структуру комплексного многообразия с* $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$.

Предложение 2. *Форма* $F_{A_{\mathrm{cs}}}$ *из* (3.30) *имеет тип* $(1,1)$, *и линейное расслоение* L, *описанное на стр. 67, допускает единственную*

[1] из-за присутствия нестабильных расслоений этот объект не является многообразием, но все же может быть описан на языке *стэков*

голоморфную структуру, согласованную с эрмитовой связностью A_{CS} и комплексной структурой; при этом изоморфизм (3.35) *отождествляет L с $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}(\Theta)$.*

Вместе с тем, на $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ имеется каноническая келерова метрика (так называемая *метрика Вейля– Петерсона*) с келеровой формой $\omega_{\mathrm{WP}} = iF_{A_{\mathrm{CS}}} = i\cdot\Omega$, дающая связность Леви - Чивита на комплексном касательном расслоении $T\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ и соответствующую ей эрмитову связность A_{LC} на антиканоническом линейном расслоении $\det T\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = \mathcal{O}(4\Theta)$. Это определяет эрмитову связность $\frac{1}{4}\,A_{\mathrm{LC}}$ на L, согласованную с голоморфной структурой на $\mathcal{O}(\Theta) = L$. Наконец, рассматривая $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ как семейство $\overline{\partial}$-операторов, мы получаем над $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ детерминантное линейное расслоение Квиллена L с эрмитовой связностью A_{Q}, форма кривизны которой также совпадает с нашей симплектической формой: $F_{A_{\mathrm{Q}}} = i\cdot\Omega$.

Предложение 3. $A_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{4}\,A_{\mathrm{LC}} = A_{\mathrm{Q}}$.

Рассмотрим теперь калибровочную теорию полей Хиггса. Голоморфное поле Хиггса ϕ является, как мы знаем, голоморфным сечением $\phi \in H^0(\Sigma_I, \mathrm{Ad}(E)\otimes K) = T^*_E\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ и определяет квадратичный дифференциал $w = \pi(E,\phi) = \mathrm{tr}(\phi^2)$. Спаривая этот квадратичный дифференциал с элементом $\dot{I} \in \Omega^{0,1}(\Sigma_I, K^{-1})$ из двойственного пространства дифференциалов Бельтрами, мы получаем на кокасательном расслоении $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ функцию

$$H_w(\phi) = \int\limits_{\Sigma} \mathrm{tr}\left(\phi^2\right)\cdot \dot{I}\ , \qquad (3.36)$$

которая согласно принципу Хартогса (см. стр. 61–62) продолжается на все многообразие модулей полустабильных пар Хиггса $\mathcal{M}^{\mathrm{H}}_{\Sigma}$.

Предложение 4. *Функции H_w $H_{w'}$, отвечающие различным квадратичным дифференциалам $w \neq w'$, коммутируют относительно скобки Пуассона, индуцируемой канонической голоморфной симплектической структурой на $\mathcal{M}^{\mathrm{H}}_{\Sigma}$.*

Доказательство. Продолжим функции H_w до постоянных по базе функций на кокасательном расслоении

$$T^*\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'' \times \Omega^{0,1}(\mathrm{Ad}(E))$$

к плоскому аффинному пространству $\mathcal{A}''$ операторов Коши - Римана на E (см. разложение (3.32)). Поскольку переменные базы и слоя канонически сопряжены относительно канонической симплектической формы на $T^*\mathcal{A}''$, а пространство голоморфных полей Хиггса есть не что иное, как нулевой уровень отображения момента по действию полной комплексной калибровочной группы $\mathcal{G}$, функции H_w и $H_{w'}$ должны коммутировать относительно скобки Пуассона. $\square$

§ 7 Вычисление рангов.

В неабелевом случае вычисление размерностей

$$\dim H^i(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}, \mathcal{O}(k\Theta))$$

использует абсолютно новую идею — рассматривать производящую функцию, дающую ответ сразу для всех многообразий модулей $\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$ в зависимости от рода g кривой Σ. В случае комплексной поляризации такая идея навевается дональдсоновской калибровочной теорией четырехмерных многообразий[1], где аналогом целочисленного параметра g служит (также целочисленный) второй класс Черна $c_2(E)$. В случае вещественной поляризации соответствующие производящие функции естественно возникают в конформной теории поля. Безусловно, было бы очень полезно отыскать конструкцию, напрямую связывающую теорию Дональдсона с конформной теорией поля столь же явно, как это происходит, например, в конструкции Накаджимы для схем Гильберта $\mathrm{Hilb}^g S$ алгебраической поверхности S.

[1]см. [71], [72]

Итак, рассмотрим гладкую алгебраическую кривую Σ рода g и многообразие $\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$ модулей полустабильных голоморфных векторных расслоений ранга 2 с тривиальным детерминантом на ней. На прямом произведении $\Sigma \times \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$ нет универсального расслоения $\mathcal{E}$, но есть расслоение $\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$, старший класс Черна которого связан с «виртуальными» классами $\mathcal{E}$ по формуле

$$c_2(\mathrm{Ad}(\mathcal{E})) = -p_1(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E})^2 - 4\,c_2(\mathcal{E}) \in H^4(\Sigma \times \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}) \ ,$$

а разложение Кюннета имеет вид:

$$-\,p_1(\mathcal{E}) = -2\,[\Sigma] \otimes [\Theta] + [\mathrm{pt}] \otimes [x] - \\ -\,4\sum_{i=1}^{g}\bigl(a_i \otimes \mu(a_i) + b_i \otimes \mu(b_i)\bigr) \ ,$$

где $[\Sigma]$ — фундаментальный класс кривой Σ, $[\mathrm{pt}]$ — класс точки на кривой Σ, a_i, b_i с $i = 1, \ldots, g$ — какой-либо симплектический базис (2.11) в $H^1(\Sigma, \mathbb{Z})$, $[\Theta] = 2\,\mu([\Sigma]) \in H^2(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}, \mathbb{Z})$ — Θ-дивизор (3.2), $[x] = 4\,\mu([\mathrm{pt}]) \in H^4(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}, \mathbb{Z})$, $\mu(a_i), \mu(b_i) \in H^1(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}})$. Таким образом, класс $-p_1(\mathcal{E})$ задает гомомрфизм:

$$H_*(\Sigma) \xrightarrow{\ \mu\ } H^*(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}) \ : \quad \sigma \longmapsto -\frac{p_1(\mathcal{E})}{4\,\sigma} \ .$$

Рассмотрим градуированную алгебру

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \mathrm{Sym}_*(H_{\mathrm{even}}(\Sigma, \mathbb{R})) \otimes \Lambda^*(H_{\mathrm{odd}}(\Sigma, \mathbb{R})), \tag{3.37}$$

градуировка в которой задается тем, что $\sigma \in H_i(\Sigma)$ имеет степень $\deg(\sigma) = 4 - i$, так что $\deg(\alpha) = i \implies \mu(\alpha) \in H^i(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}})$.

Определение 1. Линейная функция $\mathcal{S}(\Sigma) \xrightarrow{N_g} \mathbb{Q}$, значение которой $N_g(\sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdot \ \cdots \cdot \sigma_r)$ на мономе $\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdot \ \cdots \cdot \sigma_r$ с $\sigma_i \in H_{n_i}(\Sigma)$ суммарной степени $d(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{r}(4 - n_i)$ равно

$$\mu(\sigma_1) \frown \cdots \frown \mu(\sigma_r)\,, \ \text{если } d(\alpha) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}} = 6g - 6, \tag{3.38}$$

а в остальных случаях равно нулю, называется *инвариантом* или *полиномом*[2] *Ньюстеда*.

Замечание 1. Аналогичная конструкция применима к любому *семейству векторных расслоений*, т. е. к любому (виртуальному) расслоению $\mathcal{E}$ над $\Sigma \times B$ с произвольной базой B, и также дает некоторый полином $N_g^{B,\mathcal{E}}$ на $H_*(\Sigma, \mathbb{R})$.

Полином Ньюстеда инвариантен относительно группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(\Sigma)$, сохраняющих ориентацию, и так как для каждого i *скручивание Дена* $\phi_i \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma)$ меняет знак у a_i и b_i и переводит все остальные образующие в себя, значение

$$N_g\left(\mu([\Sigma])^m \cdot \mu([\mathrm{pt}])^n \cdot \mu(a_{i_{\min}}) \cdot \mu(b_{j_{\min}}) \cdot \cdots\right)$$

может быть отлично от нуля, только если $i_{\min} = j_{\min}$. А поскольку для любой пары ручек существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, переводящий одну из них в другую, выражение

$$\gamma = 2 \sum_{i=1}^{g} \mu(a_i) \cdot \mu(b_i) \in H^6(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}})$$

не зависит от выбора симплектического базиса $\{a_i, b_i\}$ в $H_1(\Sigma)$, и $N_g \in \mathbb{C}[[\mathrm{pt}], [\Sigma], \gamma]$, т. е. N_g принимает ненулевые значения только на мономах вида $[\Sigma]^m \mathrm{pt}^n \gamma^p$, причем с $m + 2n + 3p = 3g - 3$.

Таким образом, вместо градуированной алгебры (3.37) мы можем рассматривать *универсальную алгебру*

$$\mathbb{S}_3 = \mathrm{Sym}_*(\alpha \cdot \mathbb{Z} \oplus \beta \cdot \mathbb{Z} \oplus \gamma \cdot \mathbb{Z}),$$

(симметрическую алгебру свободного градуированного $\mathbb{Z}$-модуля с тремя образующими степени $\deg \alpha = 1$, $\deg \beta = 2$, $\deg \gamma = 3$) и трактовать весь набор полиномов N_g как одну линейную форму $\mathbb{S}_3 \xrightarrow{N} \mathbb{Q}$, принимающую ненулевые значения только на мономах, степень которых $d = 3n$ кратна трем, и сопоставляющую такому моному значение (3.38) полинома N_{n+1} на этом мономе. Итак,

[2]поскольку эта линейная функция может рассматриваться как однородный полином степени $3(g-1)$ на $H_*(\Sigma, \mathbb{R})$

мы получаем *неоднородный* полином N, однородные компоненты которого имеют степени $3g-3$.

Эти однородные компоненты (т. е. полиномы Ньюстеда для различных родов) связаны важным рекуррентным соотношением[3]

$$N_g(\gamma\cdot\alpha) = g\cdot N_{g-1}(\alpha). \tag{3.39}$$

Чтобы этим воспользоваться, удобно перейти к *нормированным многочленам Ньюстеда*

$$\mathbb{S}_3 \xrightarrow{N^0} \mathbb{Q} \ : \quad N^0_{3n} = \frac{N_{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.40}$$

Тогда все соотношения (3.39) запишутся одним уравнением

$$N^0(\gamma\cdot z) = N^0(z) \quad \forall z\in\mathbb{S}_3 \tag{3.41}$$

на полный нормализованный многочлен, так что мы можем исключить образующую γ и рассматривать N^0 как $\mathbb{Q}$-значную линейную форму на

$$\mathbb{S}_2 = \mathrm{Sym}_*(\alpha\cdot\mathbb{Z}\oplus\beta\cdot\mathbb{Z})\ .$$

Так называемая *гипотеза Ньюстеда* (см. [67]) предсказывает, что $N^0(\alpha^m\cdot\beta^k)$ может быть отлично от нуля только при $k\le(m+2k)/3$. Имея это в виду, заменим образующую β на

$$\omega = \alpha\cdot\beta\ .$$

Тогда N^0 как линеная форма на $\mathrm{Sym}_*(\alpha\cdot\mathbb{Z}\oplus\omega\cdot\mathbb{Z})$ будет удовлетворять соотношению

$$N^0(\alpha^{3k}\cdot\omega^n) = N_{3(n+k)+1}(\alpha^{n+3k}\cdot\beta^n)\ ,$$

из которого вытекает итоговое главное равенство[4]:

$$N^0(\alpha^{3k}\cdot\omega^n) = \frac{(-4)^{n+k}\cdot(n+3k)!}{(n+k+1)!}\cdot(2k)!\cdot(4^k-2)\cdot B_{2k}\ , \tag{3.42}$$

[3] см. [67, Предложение 26]; ниже мы увидим, что подобные правила слияния имеются и для вещественной поляризации

[4] см. [67, формула (29)]

где B_i — числа Бернулли.

Замечание 2. Таддеуш получил многочлены Ньюстеда (3.42) из формулы Верлинде для производящей функции размерностей пространств конформных блоков (см. ниже), основываясь на предположении, что квантование с помощью $\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$ является *численно полным* (см. § 5 главы 1). Мы обошли эту гипотезу Таддеуша при помощи конструкции Дональдсона из [19].

Замечание 3. Внешнее умножение на однородный элемент $x \in \mathbb{S}_3$ индуцирует дифференциальный оператор в пространстве полиномов, переводящий линейную форму $\mathbb{S}_3 \xrightarrow{L} \mathbb{Q}$ в

$$\frac{\partial L}{\partial x}(z) = (\deg z + \deg x) \cdot L(x \wedge z) ,$$

и соотношения (3.41) могут рассматриваться как дифференциальные уравнения на многочлены Ньюстеда. Более того, из этих уравнений легко угадываются и реккурентные формулы для производящих функций спаривания (3.38) (см. [66]). Подход Виттена опирался на вычисления объемов $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}) = N^0(\alpha^{3g-3})$, после чего остальные значения многочленов Ньюстеда восстанавливаются из этих реккурентных формул.

Другой способ вычисления[5] спаривания (3.38) и многочленов Ньюстеда доставляет процедура геометрической аппроксимации. Имеется цепочка флипов[6]:

$$\mathrm{MP}_{\max} \leftrightsquigarrow \cdots \leftrightsquigarrow \mathrm{MP}_1 \leftrightsquigarrow \mathrm{MP}_0, \tag{3.43}$$

где каждое MP_i есть многообразие модулей t-стабильных пар[7], дающее свое семейство векторных расслоений $\mathcal{E}_i$ над $\Sigma \times \mathrm{MP}_i$ и свои многочлены $N_{g,i}$ (см. зам. 1 из § 7 главы 3) и N_i^0, аналогичные (3.38) и (3.40). Самое правое многообразие модулей MP_0 в (3.43) является проективным пространством размерности $3g-2$:

$$\mathrm{MP}_0 = \mathbb{P}^{3g-2} .$$

а самое левое — $\mathbb{P}^1$-расслоением над $\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$:

$$\mathrm{MP}_{\max} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}} ,$$

[5]этим вычислением мы обязаны Загье и Макдональду (см. в [66] соответствующие ссылки)

[6]см. [61]

[7]см. [67], [14] или [13]

так что $N^0_{\max} \cdot H = N^0$ где H — класс Гротендика этого $\mathbb{P}^1$-расслоения, а N^0 — форма Ньюстеда. Используя явное описание каждого флипа из (3.43), мы можем шаг за шагом восстановить все многочлены $N_{g,i}$, начиная с самого правого $\mathbb{P}^{3g-2}$.

По теореме Римана– Роха– Хирцебруха

$$\sum_i (-1)^i \dim H^i(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_g, \mathcal{O}(k\Theta)) = \\ = \left(\mathrm{ch}(\mathcal{O}(k\Theta)) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_g)\right)_{3g-3}, \quad (3.44)$$

и т. к. дивизор Θ положителен, в левой части, согласно теореме Кодаиры, стоит лишь $\dim H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_g, \mathcal{O}(k\Theta)) = \dim \mathcal{H}^r_I$. С другой стороны, Ньюстед показал[8], что $c_1(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}) = 4\,[\Theta]$, а $p(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_g) = (1+\beta)^{2g-2}$, так что $\mathrm{td}(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}) = e^{2[\Theta]} \left(\frac{\sqrt{\beta}/2}{\mathrm{sh}(\sqrt{\beta}/2)}\right)^{2g-2}$. Поэтому в правой части (3.44) получаем:

$$\dim \mathcal{H}^r_I = \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1} \sum_j \sin^{2-2g} \frac{j\pi}{k+2}\ . \quad (3.45)$$

§ 8 Связности Хитчина.

В этом параграфе мы покажем, что сопоставление кривой Σ_I рода $g > 2$ многообразия модулей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I)$ голоморфных полустабильных топологически тривиальных расслоений на ней является строгим модулярным соответствием, а пространства (неабелевых) ϑ-функций

$$H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I), \mathcal{O}(k\Theta)) \quad (3.46)$$

[8] см. [55]

доставляют успешное квантование кривой Σ. Иначе говоря, при $g > 2$ кривая Σ_I однозначно восстанавливается по $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, а векторное расслоение со слоем (3.46) на многообразии модулей $\mathcal{M}_g$ кривых рода g

$$V_k \xrightarrow{p_k} \mathcal{M}_g \ : \quad p_k^{-1}(I) = H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I), \mathcal{O}(k\Theta)) \tag{3.47}$$

обладает проективной плоской связностью, так что проективизация $\mathbb{P}H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I), \mathcal{O}(k\Theta))$ локально не зависит от I.

Первое утверждение почти очевидно в силу того, что множество особых точек $\operatorname{Sing}\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = \operatorname{Kum}(\Sigma_I)$ представляет собою куммерову поверхность кривой Σ_I. Раздуем конечное множество $\operatorname{Sing}(\operatorname{Kum}(\Sigma_I))$, рассмотрим двойное накрытие полученной поверхности, разветвленное в исключительном дивизоре, а затем стянем исключительный дивизор — получится якобиан $J(\Sigma_I)$ нашей кривой. Нетрудно видеть, что ограничение неабелева Θ-дивизора на куммерово многообразие переходит при этом в дивизор $2\,\Theta$ на якобиане. Теперь классическая теорема Торелли (см. начало § 2 главы 2) дает нашу кривую Σ_I.

Существование проективной плоской связности на расслоении (3.47) в неабелевом случае[1] доказал Хитчин. Чтобы построить эту связность, мы опять воспользуемся теорией деформаций из § 4 главы 1, а калибровочная теория голоморфных полей Хиггса (см. конец § 6 главы 3) позволит нам вычислить ее кривизну.

Прежде всего напомним (см. § 6 главы 3), что на пространстве $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma))_{\mathcal{I}} = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I)$ канонически индуцируется выбором комплексной структуры I на Σ комплексная структура $\mathcal{I} = \mathcal{I}(I)$. Мы должны убедиться, что при этом выполняются все условия со стр. 18–19. Согласно результату Нарасимана и Раманана[2]

$$H^0(T\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}) = H^1(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, \mathcal{O}) = 0\ .$$

Для построения голоморфного тензора $W_0 \in H^0(S^2(T\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}))$ рассмотрим касательное пространство $T_E\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} = H^1(\Sigma, \operatorname{Ad}(E))$ в полустабильном векторном расслоении $E \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. По двойственно-

[1]обсуждение абелева случая см. на стр. 33–34

[2]см. [56]

сти Серра $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}{}_E = H^0(\Sigma, \mathrm{Ad}(E) \otimes K_\Sigma)$, где K_Σ — канонический класс кривой Σ. Касательный вектор к многообразию модулей $\mathcal{M}_g$ кривых в точке Σ_I задается дифференциалом Бельтрами $\dot{I} \in H^1(\Sigma_I, K_\Sigma^*)$, и $\smile$-умножение на него

$$H^0(\Sigma, \mathrm{Ad}(E) \otimes K_\Sigma) \xrightarrow{\psi \mapsto \psi \smile \dot{I}} H^1(\Sigma, \mathrm{Ad}(E)) \tag{3.48}$$

является квадратичной формой на $T_E^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Ее продолжение на все многообразие модулей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ и дает искомое сечение W_0.

Предложение 1. *Отображение*

$$H^1(\Sigma_I, T^{1,0}) \xrightarrow{f} H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, S^2(T^{1,0}\mathcal{M}^{\mathrm{ss}})),$$

переводящее дифференциал Бельтрами $\dot{I}$ в квадратичную форму

$$f(\dot{I}) \,:\, \phi \longmapsto \int\limits_\Sigma \mathrm{tr}(\phi^2) \wedge \dot{I}\ , \tag{3.49}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Согласно принципу Хартогса (см. § 4 главы 3), мы можем продолжить любую голоморфную квадратичную форму с $T^*\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ на его замыкание Хитчина $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{H}}$, причем продолженная форма должна быть постоянна на слоях голоморфного отображения моментов (3.18), поскольку они являются компактными абелевыми многообразиями. Итак, наше пространство голоморфных квадратичных форм двойственно пространству голоморфных квадратичных дифференциалов на Σ_I. Этим все сказано. □

Рассмотрим деформацию $\widetilde{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}} \xrightarrow{p} B$ комплексной структуры $\mathcal{I}$ над некоторой открытой окрестностью нуля $B \subset \mathbb{C}^m$ (такую что $p^{-1}(0) = \mathcal{M}_{\mathcal{I}}^{\mathrm{ss}}$) и голоморфное векторное поле $t \in H^0(B, TB)$ на B. Согласно классической теории Кодаиры– Спенсера, оно определяет семейство классов инфинитезимальных деформаций вдоль векторов t, т. е. сечение

$$\xi \in H^0(B, R^1 p_* T\widetilde{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}})\ . \tag{3.50}$$

Выбрав над каждой точкой $b \in B$ достаточно мелкое открытое покрытие слоя $\mathcal{M}_b^{\mathrm{ss}} = p^{-1}(b)$, рассмотрим семейство (3.50) как семейство элементов пространства $H^1(\mathcal{M}_b^{\mathrm{ss}}, D^1(L))$ классов когомологий дифференциальных операторов на расслоении предквантования L, т. е. как сечение $\Delta \in H^0(B, R^1 p_*(D^1(L)))$, описывающее инфинитезимальные деформации расслоения поляризации вдоль векторов t. Построенная в (3.48) голоморфная квадратичная форма $W_0 \in H^0(B, R^0 p_*(S^2 T))$ поднимается (при помощи связности Леви– Чивита метрики (3.49)) до семейства операторов Лапласа–Бельтрами, заданных локально над открытыми множествами зафиксированного нами покрытия слоев $\mathcal{M}_b^{\mathrm{ss}}$. Эти операторы второго порядка имеют одинаковые главные части, и стало быть, задают сечение $D \in H^0\left(B, R^1 p_*(D^2(L))\right)$. Теперь описанная в § 4 главы 1 машинерия дает нам голоморфную проективную связность на расслоениях (3.47) над базой B с главным символом, равным

$$-\frac{1}{2k-4}\,\sigma \cdot \delta(W) \in H^0(B, R^1 p_* T\widetilde{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}})\ . \tag{3.51}$$

Более того, комбинация $\partial_t + P_t$, где

$$P_t = i\,D + \frac{i}{2k-4}\,\Delta \tag{3.52}$$

задает глобально определенный *голоморфный оператор теплопроводности* на $L_{\mathcal{I}}$, а его главный символ является квадратичной формой, поднятой с базы расслоения Хитчина (3.18), и согласно предл. 4 из § 6 главы 3, эти символы коммутируют как функции на кокасательном расслоении.

Таким образом, для вычисления кривизны нашей связности надо вычислить лишь коммутатор

$$\partial_t P_{t'} - \partial_{t'} P_t - [P_t, P_{t'}] \tag{3.53}$$

для двух голоморфных векторных полей t и t' на B. Последний член в (3.53) *a priori* имеет порядок 3, но его главный символ является[3] скобкой Пуассона коммутирующих символов операто-

[3]см. [32]

ров (3.52), так что

$$\partial_t P_{t'} - \partial_{t'} P_t - [P_t, P_{t'}] \in H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^2(L)) \tag{3.54}$$

для любой комплексной структуры из B.

Чтобы доказать, что построенная нами связность является проективно плоской, мы должны проверить, что оператор (3.54) постоянен. Но последняя стрелка в длинной точной последовательности когомологий

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^1(L)) \longrightarrow H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^2(L)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, S^2T) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^1(L)) \end{aligned} \tag{3.55}$$

тройки

$$0 \longrightarrow D^1(L) \longrightarrow D^2(L) \longrightarrow S^2T \longrightarrow 0$$

является вложением, поскольку ее композиция со взятием символа $H^1(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^1(L)) \longrightarrow H^1(T)$ есть изоморфизм по предл. 1 из § 8 главы 3. Поэтому $H^1(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^2(L)) = H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, D^1(L)) = \mathbb{C}$.

В итоге получается

Теорема 1. *Келерово квантование многообразий модулей топологически тривиальных двумерных векторных расслоений является успешным.*

и проблема:

является ли построенная нами связность унитарной или на V_k есть другая унитарная проективно плоская связность?

Глава 4.
СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЯ МОДУЛЕЙ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

§ 1 $U(1)$-действие Голдмана.

Симплектическая часть неабелевой теории ϑ-функций была разработана усилиями У. Голдмана, Дж. Вейцмана, Л. Джеффри и Дж. Хертьюбайса. Отправной точкой тут является теорема Нарасимана – Шешадри (см. предл. 1 из § 6 главы 3) о совпадении

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma) = \mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2)) \ .$$

Отображение кривизны $F : \mathcal{A}_h \xrightarrow{a \mapsto F_a} \Omega^2(\mathrm{Ad}(E))$ является отображением моментов для симплектического действия группы $\mathrm{SU}(2)$-калибровок $\mathcal{G}_h$ на пространстве $\mathrm{SU}(2)$-связностей $\mathcal{A}_h$ относительно канонической калибровочно инвариантной симплектической формы

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\Sigma} \mathrm{tr}(\gamma_1 \wedge \gamma_2) \ . \tag{4.1}$$

Его нулевой уровень $F^{-1}(0) = \mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}_h$ состоит из плоских связностей, и результат симплектической редукции

$$\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2)) = \mathcal{A}_h // \mathcal{G}_h = \mathcal{A}_F / \mathcal{G}_h \tag{4.2}$$

есть симплектический орбифолд, являющийся гладким симплектическим многообразием над полустабильными неразложимыми представлениями.

Любая простая замкнутая петля C на Σ определяет на этом пространстве *функцию Голдмана*: $c_C : \mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2)) \longrightarrow [\,0\,,\,1\,]$, сопоставляющую представлению ϱ число

$$c_C(\varrho) = \frac{1}{\pi}\,\arccos\Big(\mathrm{tr}\big(\varrho[C]\big)/2\Big)\ .$$

В [35] Голдман показал, что c_C является гамильтонианом симплектического действия на $\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))$ группы $U(1)$, которое можно описать следующим образом. Для любого $g \in \mathrm{SU}(2)$, отличного от $\pm\mathrm{Id}$, существуют единственные $\ln g \in \mathfrak{su}(2)$ и $t \in \mathbb{R}$, такие что

$$|\ln g|^2 = 2\ , \quad e^{t \ln g} = g\ . \tag{4.3}$$

Дополним класс $[C]$ до какого-нибудь станадартного базиса фундаментальной группы римановой поверхности Σ:

$$\pi_1 = \Big\langle\, a_1, a_2, \ldots, a_g\,,\, b_1, b_2, \ldots, b_g \;\Big|\; \prod_{i=1}^{g}[\,a_i\,,\,b_i\,] = \mathrm{Id}\,\Big\rangle\ , \tag{4.4}$$

так чтобы $[C] = a_1$. Поскольку $[g, e^{t\ln g}] = 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, правило

$$\varrho(b_1) \longmapsto \varrho(b_1)\cdot e^{t \ln \varrho(a_1)}$$

определяет гамильтоново действие $U(1)$ на класс любого представления ϱ, такого что $\varrho(a_1) \neq \pm\mathrm{Id}$.

Нетрудно видеть, что голдмановские гамильтонианы непересекающихся петель находятся в инволюции относительно канонической симплектической структуры Ω, индуцированной на пространстве $\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))$ формой (4.1) при редукции (4.2):

$$C_1 \cap C_2 = \varnothing \implies \{c_{C_1}, c_{C_2}\}_\Omega = 0. \tag{4.5}$$

Таким образом, если мы зафиксируем на Σ максимальный набор непересекающихся гомотопически неэквивалентных петель[1]

$$\{C_1, C_2, \ldots, C_{3g-3}\}, \tag{4.6}$$

(которые мы в дальнейшем будем называть *окружностями*, см. рис. 3), то мы получим полный набор из $3g-3$ интегралов в инволюции

$$c_i(\varrho) = \frac{1}{\pi} \arccos\Big(\mathrm{tr}\big(\varrho[C_i]\big)/2\Big) \in [\,0\,,\,1\,] \tag{4.7}$$

для классической механической системы $\Big(\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))\,,\ \Omega\Big)$.

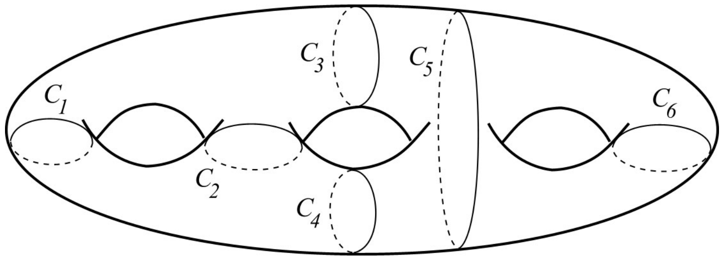

Рис. 3. Полный набор простых петель

Риманова поверхность с фиксированным разложением на штаны

$$\Sigma \;=\; \bigcup_{j=1}^{3g-3} C_j \;\;\cup\;\; \bigcup_{i=1}^{2g-2} P_i \tag{4.8}$$

называется *размеченной*. Комбинаторика такой разметки определяется двойственным *тривалентным графом* Γ, множество вершин которого есть множество штанов, а ребра — это окружности-разрезы:

$$\begin{aligned} V(\Gamma) &= \{v_1, v_2, \ldots, v_{2g-2}\} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{2g-2}\} \\ E(\Gamma) &= \{e_1, e_2, \ldots, e_{3g-3}\} = \{C_1, C_2, \ldots, C_{3g-3}\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

[1] легко видеть, что он состоит из $3g-3$ охватывающих «ручки» окружностей, разрезающих Σ на $2g-2$ «штанов» (см. рис. 3–рис. 4); такой набор разрезов играет в геометрии связностей ту же роль, что набор точек в теории функций: как функция ограничивается на точку (т. е. вычисляется в ней), так и связность ограничивается на петлю; в этом смысле штаны — это минимальный геометрический объект, допускающий нетривиальную неабелеву калибровочную теорию

(две вершины v_i и v_j соединяются ребром e_ℓ, если и только если $C_\ell = \partial P_i \cap \partial P_j$).

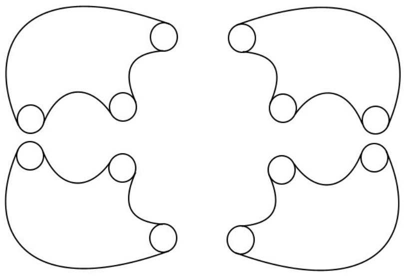

Рис. 4. Раскрой на штаны

§ 2 Вещественная поляризация.

Итак, разметка Γ римановой поверхности Σ задает вещественную поляризацию данных предквантования

$$(\,\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))\,,\ \Omega\,,\ L\,,\ A_{\mathrm{cs}}\,)\,. \tag{4.10}$$

А именно, $3g-3$ коммутирующих функций Голдмана (4.7) задают отображение

$$\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2)) \xrightarrow{\pi_\Gamma} [\,0\,,\,1\,]^{3g-3} \subset \mathbb{R}^{3g-3} \tag{4.11}$$

в единичный куб, которое является гамильтоновым для действия $(3g-3)$-мерного тора $U(1)^{3g-3}$ на $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma_\Gamma), \mathrm{SU}(2))$.

Функции Голдмана $(c_1, c_2, \ldots, c_{3g-3})$ — *координаты действия* гамильтоновой системы (4.10) — всюду непрерывны и гладки над внутренними точками единичного куба $[0,1]^{3g-3}$. Из этого следует[1], что образ проекции (4.11) представляет собою выпуклый многогранник

$$\Delta_\Gamma = \pi_\Gamma\,(\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma_\Gamma), \mathrm{SU}(2))) \subset [\,0\,,\,1\,]^{3g-3}\,, \tag{4.12}$$

[1] см. [32]

симплектический объем $\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))$ равен евклидову объему этого многогранника: $\int_{\mathfrak{RC}} \Omega^{3g-3} = \mathrm{Vol}\,(\Delta_\Gamma)$.

Множество бор-зоммерфельдовых орбит уровня k вещественной поляризации (4.11) совпадает с множеством $\frac{1}{2k}$-целых точек в многограннике Δ_Γ:

$$\mathrm{BS}_k\,(\,\mathfrak{RC}(\pi_1, \mathrm{SU}(2))\,,\, \Omega\,,\, L\,,\, A_{\mathrm{CS}}\,) = \Delta_\Gamma \cap \frac{1}{2k}\mathbb{Z}$$

(см. рис. 5), и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\#\,(\mathrm{BS}_k)}{k^{3g-3}} = \int_{\mathfrak{RC}} \Omega^{3g-3} = \mathrm{Vol}\,(\Delta_\Gamma)$, как мы и предсказывали в § 2 главы 1.

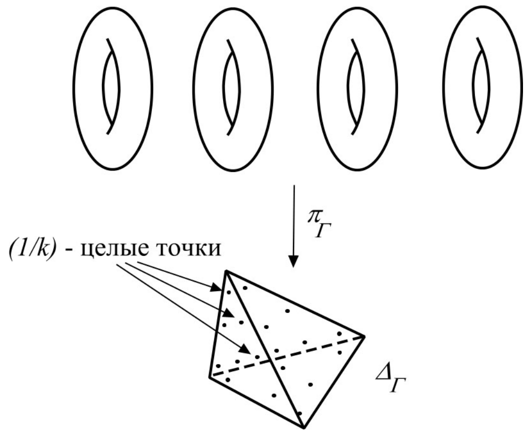

Рис. 5. Поляризация Голдмана

Чтобы увидеть это, интерпретируем векторы $w \in \mathbb{R}^{3g-3}$ как дифференциальные 1-формы на $\mathbb{R}^{3g-3}$ и рассмотрим соответствующие им гамильтоновы векторные поля ξ_w, касательные к слоям π_Γ. Диффеоморфизмы

$$t_w = e^{\xi_w} \subset \mathrm{Diff}^+\,(\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma_\Gamma), \mathrm{SU}(2)))$$

сохраняют форму кривизны связности A_{CS}, и поскольку пространство $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma_\Gamma), \mathrm{SU}(2))$ односвязно,

$$t_w^*(A_{\mathrm{CS}}) = A_{\mathrm{CS}}^{\alpha_w}$$

для подходящих калибровочных преобразований[2] $\alpha_w \in \mathcal{G}_L$ (они образуют $U(1)^{3g-3}$-торсор точно так же, как в § 4 главы 2 при описании классических ϑ-функций для абелевых многообразий). Таким образом, все периоды связности A_{CS} обнуляются в точности над $\frac{1}{2k}$-целыми точками.

Точное описание многогранника Δ_Γ получается из описания пространства плоских $\mathrm{SU}(2)$-связностей на одних штанах P_0 с $\partial P_0 = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. В этом случае нетрудно проверить[3], что отображение (4.11)

$$\pi_0 \, : \, \mathfrak{RC}(\pi_1(P_0), \mathrm{SU}(2)) \xrightarrow{\sim} \Delta_0 \subset \mathbb{R}^3 \tag{4.13}$$

взаимно однозначно и непрерывно, а его образ является тетраэдром, задаваемым в координатах (c_1, c_2, c_3) на $\mathbb{R}^3$ неравенствами:

$$\begin{cases} \qquad 0 \leqslant c_i \leqslant 1 \\ |c_1 - c_2| \leqslant c_3 \leqslant \min(c_1 + c_2, 2 - c_1 - c_2) \end{cases}, \tag{4.14}$$

причем π_0 гладко над его внутренними точками. В общем случае опсание многогранника Δ_Γ в терминах двойственного тривалентного графа Γ доставляет

Предложение 1. *Многогранник Δ_Γ задается набором из 2g-2 неравенств (4.14), выполненных для каждой тройки (c_i, c_j, c_k) координат в $\mathbb{R}^{3g-3}$, приходящей из каких-либо штанов разложения (4.8).*

[2] описание калибровочных орбит с фиксированной формой кривизны см. в [4]
[3] см. [41]

§ 3 Бор-зоммерфельдовы слои.

Квантование вещественной поляризации (4.11) сопоставляет классической механической системе (4.10) бор-зоммерфельдовы пространства волновых функций

$$\mathcal{H}_\Gamma^k = \bigoplus_{b\in\Delta_\Gamma\cap\frac{1}{2k}\mathbb{Z}} \mathbb{C}\cdot s_b\,, \tag{4.15}$$

где s_b — ковариантно постоянное сечение ограничения $L|_{\pi^{-1}(b)}$.

Функция w на наборе ребер тривалентного графа Γ со значениями в множестве $\frac{1}{2k}$-целых точек отрезка $[\,0\,,\,1\,]$:

$$E(\Gamma) \xrightarrow{\ w\ } [\,0\,,\,1\,]\cap\frac{1}{2k}\,\mathbb{Z} = \left\{0,\,\frac{1}{2k},\,\frac{1}{k},\,\frac{3}{2k},\,\dots\,,\,1\right\}\,, \tag{4.16}$$

называется *допустимым целым весом* уровня k на графе Γ, если ее значения на каждой тройке ребер $\{e_1,e_2,e_3\}$ с общей вершиной удовлетворяют трем условиям[1]:

1) $w(e_1)+w(e_2)+w(e_3)\in\frac{1}{2k}\,\mathbb{Z}\,,$

2) $w(e_1)+w(e_2)+w(e_3)\leqslant 1\,,$

3) $|w(e_1){-}w(e_2)|\leqslant w(e_3)\leqslant\min\left(w(e_1)+w(e_2),2k-w(e_1-e_2)\right).$

Множество всех таких весов обозначается через $W^k(\Gamma)$. Простым, но очень важным свойством весов является

Предложение 1. *Число $|W^k(\Gamma)|$ всех допустимых целочисленных весов уровня k зависит только от рода g, а не от самого графа Γ,*

[1] третье условие (второе неравенство из (4.14)) представляет собою неравенство треугольника на сфере: если нарисовать вокруг каждой вершины графа треугольник со сторонами длины $w(e_1), w(e_2), w(e_3)$, ортогональными выходящим из нее ребрам, и склеить их по соответственным сторонам, получится триангулированная риманова поверхность Σ_w, конечнолистно накрывающая сферу S^2 (например, для простейшего графа Θ (см. рис. рис. 6 на стр. 105) это будет накрытие степени 1) и задающая на ней целочисленную $\frac{1}{2k}$-триангуляцию

и совпадает с числом Верлинде (3.45):

$$W_g^k = \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1} \sum_{j=1}^{k+1} \sin^{2-2g} \frac{j\pi}{k+2} \tag{4.17}$$

Для описания геометрии бор-зоммерфельдова слоя, отвечающего допустимому целому весу w, зафиксируем флаг подгрупп

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset U(1) \subset \mathrm{SU}(2) \tag{4.18}$$

и для некоторой специально приспособленной[2] к нашему разбиению на штаны связности $a \in \pi^{-1}(w)$ рассмотрим два отображения

$$E(\Gamma) \xrightarrow{e_w} \{U(1)\,,\, \mathrm{SU}(2)\}$$
$$V(\Gamma) \xrightarrow{v_w} \{\mathbb{Z}\,,\, U(1)\,,\, \mathrm{SU}(2)\},$$

сопоставляющие петле C_j элемент флага (4.18), сопряженный стабилизатору монодромии связности $[a]$ вдоль петли, а штанам P_i — элемент, сопряженный стабилизатору связности $a|_{P_i}$ (ясно, что при этом $C_j \subset \partial P_n \implies v_w(P_n) \subset e_w(C_j)$, и если $\partial P_n = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, то $e_w(C_1) = e_w(C_2) \in \mathrm{SU}(2) \implies e_w(C_3) \in \mathrm{SU}(2) \implies v_w(P_n) \in \mathrm{SU}(2)$ и т. д.).

Предложение 2. ***Функции** e_w **и** v_w **зависят только от**[3] w, **но не от выбора связности** $[a] \in \pi^{-1}(w)$.*

Таким образом, с каждым весом w можно связать две подгруппы

$$G_e = \prod_{C \in E(\Gamma)} e_w(C) \quad \text{и} \quad G_v = \prod_{P \in V(\Gamma)} v_w(P)\,, \tag{4.19}$$

причем G_v действует на G_e по следующему правилу: элемент

$$g = g_1 g_2 \cdots g_{2g-2} \in G_v \text{ с } g_j \in v_w(P_j)$$

[2]см. [41, Определение 2.2], где Джеффри и Вейцман строят ковариантно постоянное сечение s_w ограничения (L^k, A_{CS}) на $\pi^{-1}(w)$.

[3]точнее говоря, они зависят от комбинаторики разложений множеств уровня функции w на связные компоненты $w^{-1}(\alpha) = \cup \Gamma_i(\alpha)$, которую мы еще обсудим в главе гл. 6

заменяет в произведениях $t_1 t_2 \cdots t_{3g-3} \in G_e$ элементы $t_i \in e_w(C_i)$ с $C_i \subset \partial P_m \cap \partial P_n$ на элементы $g(t_i) = g_m t_i g_n^{-1}$ (подробнее это действие будет обсуждаться в § 3 главы 6, посвященном калибровочной теории на графах).

Предложение 3 ([41, Теорема 2.5]). $\pi^{-1}(w) = G_e/G_v$.

Следствие 1. *Существуют неотрицательные $t, p, s \in \mathbb{Z}$ и конечная абелева группа G_w, зависящие только от w, такие что*

$$\pi^{-1}(w) = T^t \times \frac{(S^3)^p \times (S^2)^s}{G_w};$$

в частности, $H_1(\pi^{-1}(w)) = \mathbb{Z}^t \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

Комбинаторная геометрия бор-зоммерфельдовых слоев такова. Целочисленная подрешетка $\mathbb{Z}^{3g-3} \subset \mathbb{R}^{3g-3}$ в пространстве с координатами действия c_i задает *тор действия*:

$$T^A = \mathbb{R}^{3g-3}/\mathbb{Z}^{3g-3} \tag{4.20}$$

с проекцией $\mathfrak{RC}(\pi_1\Sigma_\Gamma), \mathrm{SU}(2)) \xrightarrow{\pi_A} T^A$, которая отождествляет большинство точек границы $\partial\Delta_\Gamma$. Любая функция w вида (4.16), удовлетворяющая лишь первым двум условиям (1), (2) со стр. 87, задает на торе действия точку $w \in T^A_{2k}$ порядка $2k$. При этом подмножество

$$W^k(\Gamma) \subset T^A_{2k}. \tag{4.21}$$

допустимых весов (т. е. удовлетворяющих и условию (3)) будет получаться *a priori* разным для разных разметок Γ рода g.

Разложение (4.15) пространства волновых функций в прямую сумму одномерных подпространств определено с точностью до покоординатного действия тора размерности $|W^k(\Gamma)|$, поскольку ковариантно постоянные унитарные сечения s_b определены лишь с точностью до действия $U(1)$. Мы собираемся отождествить[4] это

[4]это отождествление будет построено в § 8 главы 6 при помощи калибровочной теории на тривалентных графах, пришедшей из рациональной конформной теории поля, которую мы обсудим в следующих двух главах

пространство с пространством, порожденным допустимыми целочисленными весами:

$$\mathcal{H}^k_\Gamma = \bigoplus_{w \in W^k_\Gamma} \mathbb{C} \cdot w \ . \tag{4.22}$$

Это пространство имеет фиксированный базис и выделенную целочисленную подрешетку $\mathbb{Z}^{|W^k_\Gamma|} \subset \mathcal{H}^k_\Gamma$. Более того, оно вложено в независящее от Γ большее пространство

$$\mathcal{H}^k = \bigoplus_{w \in T^A_{2k}} \mathbb{C} \cdot w \tag{4.23}$$

с целочисленной подрешеткой $\mathbb{Z}^{|T^A_{2k}|} \subset \mathcal{H}^k$.

§ 4 Модель Дельцана.

Отображения моментов типа (4.11) являются объектом изучения *торической симплектической геометрии*. А именно, если имеется гладкое компактное симплектическое многообразие (M, ω) размерности $2n$ с гладким гамильтоновым действием n-мерного тора T^n, то соответствующие координаты действие – угол задают лагранжеву проекцию

$$M \xrightarrow{\pi} \Delta \subset \mathbb{R}^n$$

на выпуклый многогранник Δ, удовлетворяющий так называемым условиям Дельцана[1] и заключающий в себе полную информацию о симплектической геометрии (M, ω). В частности, многообразие M, симплектическая форма ω и исходное симплектическое действие тора T^n однозначно восстанавливаются по Δ, а если фазовое пространство (M, ω) имело комплексную поляризацию (т. е. структуру Ходжа с келеровой формой ω), то и эта структура

[1]см. [18]

тоже однозначно считывается[2] с Δ. С другой стороны, для любого многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условиям Дельцана, можно построить гладкое симплектическое многообразие с гамильтоновым действием T^n так, что образом соответствующего отображения моментов будет в точности Δ.

На пространстве $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))$ гамильтоново действие тора T^{3g-3}, как мы видели, имеется, но это пространство особо при $g > 2$, а действие — не гладко над границей многогранника Δ_Γ. Тем не менее, многогранник Δ_Γ удовлетворяет условиям Дельцана, а значит, определяет гладкое компактное ходжево многообразие $\mathcal{M}_\Gamma^{\mathrm{D}}$ с гладким симплектическим действием тора T^{3g-3}. Это многообразие называется[3] *моделью Дельцана* многообразия модулей

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2)) = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I)\ .$$

Поскольку последнее (для комплексной римановой поверхности Σ_I) является алгебраическим многообразием, существует бирациональный морфизм

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I) \xrightarrow{f} \mathcal{M}_\Gamma^{\mathrm{D}}\ .$$

В частности, модель Дельцана $\mathcal{M}_\Gamma^{\mathrm{D}}$ имеет каноническую поляризацию — линейное расслоение $H\ :\ f^*(H) = \Theta$. А поскольку модель Дельцана как комплексное многообразие является жесткой, келерово квантование $(\mathcal{M}_\Gamma^{\mathrm{D}}, H)$ автоматически является успешным.

Пространствами волновых функций этого квантования служат пространства голоморфных сечений

$$H^0(\mathcal{M}_\Gamma^{\mathrm{D}}, H^k)\ , \tag{4.24}$$

и их размерности легко вычисляются по формуле Дьюстермата - Хекмана[4]. И поскольку бор-зоммерфельдовы слои у (4.11) находятся над теми же точками многогранника Δ_Γ, что и у модели Дельцана, размерность пространства (4.24) оказывается равной

[2]см. [34]
[3]см. [77]
[4]см. [77]

числу бор-зоммерфельдовых слоев проекции (4.11). Таким образом, келерово квантование динамической системы $(\mathcal{M}_\Gamma^{\mathrm{D}}, \omega)$ является численно полным.

Глава 5.
WZW CQFT

Римановы поверхности являются главными действующими лицами в конформной квантовой теории поля в размерности $2 = 1 + 1$, происходящей из теории струн и служащей для объяснения различных критических феноменов, и пространства волновых функций $H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta))$, являющиеся в нашем подходе результатом успешного келерова квантования некоторой классической механической системы, первоначально возникли как *пространства конформных блоков* конформной квантовой теории поля. С другой стороны, бор-зоммерфельдовы пространства

$$\mathcal{H}_\pi^k = \bigoplus_{b \in \mathrm{BS}_k} \mathbb{C} \cdot s_b$$

появляются в комбинаторной версии конформной квантовой теории поля[5] как слои проективно плоских векторных расслоений над многообразием модулей $\mathcal{M}_g$ кривых рода g. Более того, двумерная CFT может быть сформулирована в рамках алгебраической геометрии многообразия модулей римановых поверхностей. Важнейшим частным случаем[6] тут является проколотая сфера Римана $\Sigma = \mathbb{CP}_1 \setminus \{p\}$. С этой «классической» простейшей версии конформной теории поля мы и начнем.

[5]см. [25] и [48]

[6]изученным Белавиным– Книжником– Замолодчиковым в [45] и прекрасно демонстрирующим как общую идеологию этой теории, так и ее характерные технические детали

§ 1 WZW-версия.

Одна из важнейших характеризаций классического пространства абелевых ϑ-функций состоит в том, что оно представляет собой единственное неприводимое представление алгебры Гейзенберга. Аналогично, пространство неабелевых ϑ-функций

$$H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma), \mathcal{O}(k\Theta))$$

является неприводимым представлением калибровочной алгебры WZW RCFT[1].

Очертим основные моменты этой теории. Пусть t — локальный параметр в точке $p \in \Sigma$; *горизонтальной алгеброй* WZW называется *алгебра петель* $\mathfrak{sl}_2^t = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Ее центральное расширение

$$\overline{\mathfrak{sl}}_2^t = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C} \cdot e\ , \tag{5.1}$$

со скобкой

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg + k \cdot \mathrm{tr}(XY) \cdot \mathrm{res}_0(g\, df)$$

называется алгеброй *k-калибровок.*

Из общей теории алгебр Каца – Муди известно, что алгебра (5.1) имеет единственное неприводимое представление $\mathcal{H}^k$, содержащее ненулевой вектор, который аннулируется подалгеброй $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t]$, и центральный элемент расширения $\overline{\mathfrak{sl}}_2^t$ действует на $\mathcal{H}^k$ скалярным умножением на k (номер уровня).

Имеется естественное вложение

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\Sigma) \xrightarrow{\ \iota\ } \overline{\mathfrak{sl}}_2^t\ , \tag{5.2}$$

где $\mathbb{C}(\Sigma)$ — поле мероморфных функций на кривой Σ. Это поле содержит подкольцо $\mathbb{C}(\Sigma)_p \subset \mathbb{C}(\Sigma)$ функций, регулярных вне точки $p \in \Sigma$, и ограничение вложения (5.2) на это подкольцо реализует $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\Sigma)_p \subset \overline{\mathfrak{sl}}_2^t$ как подалгебру со скобкой

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg\ .$$

[1] т. е. рациональной конформной квантовой теории поля Весса– Зумино– Виттена

Рассмотрим естественное действие этой подалгебры на контраградиентном $\overline{\mathfrak{sl}}_2^t$-модуле $(\mathcal{H}^k)^*$.

Определение 1. Подпространство $V_k \subset (\mathcal{H}^k)^*$, аннулируемое подалгеброй $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\Sigma)_p \subset \overline{\mathfrak{sl}}_2^t$, называется *пространством конформных блоков* уровня k.

Каким образом это пространство связано с векторными расслоениями на Σ? Любое векторное расслоение E можно тривиализовать над малым диском $D_p \ni p$ и над $\Sigma \setminus \{p\}$. Функция перехода между двумя такими тривиализациями представляется рядом Лорана

$$\gamma_E \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] ,$$

и классы таких рядов по модулю автоморфизмов тривиальных расслоений над D_p и $\Sigma \setminus \{p\}$ составляют *алгебраический стэк*

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\Sigma)_p \setminus \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \,/\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t] ,$$

параметризующий все (в том числе и нестабильные) векторные расслоения с точностью до изоморфизма. Этот стэк является фактором универсального однородного пространства

$$Q = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]/\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t] . \tag{5.3}$$

Линейное расслоение $\mathcal{O}(\Theta)$ поднимается до универсального линейного расслоения L_χ на этом однородном пространстве, и по теореме Кумара и Метью имеется изоморфизм

$$H^0(Q, L_\chi^k) = \mathcal{H}^k ,$$

отождествляющий $H^0(\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}, \mathcal{O}(k\Theta))$ с подпространством $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\Sigma)_p$-инвариантов в $(\mathcal{H}^k)^*$. Стандартная техника матричных дивизоров[2] показывает, что это пространство конечномерно. Но точное вычисление его размерности требует более изощренных манипуляций.

Зафиксируем на римановой поверхности Σ еще несколько попарно различных точек $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} \subset \Sigma$, отличных от исходной точки $p \in \Sigma$ и размеченных числами $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

[2]например, как в обзоре [71]

которые мы будем интерпретировать как размерности конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots, V_{n_m} \quad , \quad \dim(V_{n_i}) = n_i \; .$$

Алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}(\Sigma)_p$ действует на V_{n_i} по правилу

$$X \otimes f \; : \; v \longmapsto f(p_i) \cdot X(v) \; ,$$

где $p_i \in \Sigma$ — точка, соответствующая представлению n_i, а $v \in V_{n_i}$. Оказывается, что векторные пространства

$$V_{k,\Sigma}\big(\{(p_i, n_i)\}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}(\Sigma)_p} \left(\mathcal{H}^k \; , \; \bigotimes_{i=1}^{m} V_{n_i} \right)$$

не зависят ни от модулей кривой, ни от выбора точек и обладают многими другими хорошими свойствами, из которых наиболее важным для нас является их поведение при вырождении Σ в кривую с одной двойной точкой: результат такого вырождения геометрически представляется гладкой кривой Σ_0 рода $g-1$ с отмеченной парой точек (q_+, q_-), и

$$V_{k,\Sigma}\big(\{(p_i, n_i)\}\big) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_{k,\Sigma_0}\big(\{(p_i, n_i),\, (q_+, n),\, (q_-, n)\}\big) \; ,$$

что позволяет вести индукцию по роду точно так же, как в § 7 главы 3.

После этого можно оставить геометрию и рассмотреть моноид M_k, состоящий из формальных сумм $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, представляющих возможные разметки точек. Сопоставим каждой такой сумме символ $\mathrm{rk}_g(N) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim V_{k,\Sigma}\big(\{(p_i, n_i)\}\big)$. Легко видеть, что

$$\mathrm{rk}_0(0) = 1 \; , \qquad \mathrm{rk}_g(N) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathrm{rk}_{g-1}(N + n + n) \; ,$$

$$g = g' + g'' \implies \mathrm{rk}_g(N' + N'') = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathrm{rk}_{g'}(N' + n) \cdot \mathrm{rk}_{g''}(N'' + n) \; ,$$

откуда убывающей индукцией по g получаются так называемые *правила слияния*[3]:

$$\begin{gathered}\mathrm{rk}_0(0) = 1 \ , \\ \mathrm{rk}_0(N' + N'') = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathrm{rk}_0(N' + n) \cdot \mathrm{rk}_0(N'' + n) \ , \end{gathered} \tag{5.4}$$

задающие на моноиде M_k структуру коммутативного кольца:

$$N \cdot N' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathrm{rk}_0(N + N' + n) \cdot n \ ,$$

которое называеется *кольцом слияния* и очень напоминает кольцо представлений $\mathfrak{RC}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Различие между ними заключается в зависимости умножения на M_k от уровня k: по формуле Клебша – Гордана, произведение двух неприводимых представлений в $\mathfrak{RC}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ описывается при $n_1 \geqslant n_2$ формулой

$$n_1 \otimes n_2 = (n_1 + n_2) \oplus (n_1 + n_2 - 2) \oplus \cdots \oplus (n_1 - n_2) \tag{5.5}$$

тогда как в M_k произведение $n_1 \cdot n_2$ равно $n_1 \otimes n_2$ только при $n_1 + n_2 \leqslant k$, а при $n_1 + n_2 \geqslant k$ имеет вид

$$(2k - n_1 - n_2) \oplus (2k - n_1 - n_2 + 2) \oplus \cdots \oplus (n_1 - n_2) \ .$$

Таким образом, кольцо слияния M_k уровня k получается факторизацией кольца представлений $\mathfrak{RC}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ по идеалу, порожденному $(k + 1)$.

Обозначим через $\mathrm{Spec}(M_k)$ множество характеров кольца M_k (т. е. гомоморфизмов $M_k \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$). Элементарное вычисление показывает, что

$$\mathrm{rk}_g(\varnothing) = \sum_{\chi \in \mathrm{Spec}(M_k)} \chi(c)^{g-1}, \tag{5.6}$$

где $c = \sum\limits_{n=0}^{k} n \cdot n \in M_k$, так что $\chi(c) = \sum\limits_{n=0}^{k} |\chi(n)|^2 \ \forall \, \chi \in \mathrm{Spec}(M_k)$.

[3]на самом деле все загадочные формальные манипуляции, приведшие нас к формулам (5.4), имеют простую алгебро-геометрическую интерпретацию в контексте векторных расслоений

С другой стороны, множество характеров кольца представлений $\mathrm{Spec}(\mathfrak{RC}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})))$ исчерпывается, как известно, характерами

$$\chi_z(n) = \frac{\sin\bigl((n+1)\,z\bigr)}{\sin z}\ ,$$

зависящими от $z \in \mathbb{C}$. Такой характер содержится в $\mathrm{Spec} M_k$ (т. е. зануляется на $(k+1)$), если и только если

$$z = \frac{\pi n}{k+2} \ \text{где}\ 1 \leqslant n \leqslant (k+1)\ .$$

Следовательно, по формуле (5.6), размерность пространства конформных блоков (см. опр. 1 из § 1 главы 5) равна:

$$\mathrm{rk} V_k = \mathrm{rk}_g(\varnothing) = \left(\frac{k+2}{2}\right)^{g-1} \sum_{j=1}^{k+1} \sin^{2-2g} \frac{j\pi}{k+2}\ ,$$

что вновь совпадает с числом Верлинде!

Хотелось бы подчеркнуть, что при работе с конформными блоками мы нигде не фиксировали никаких эрмитовых структур, имея дело только с $\mathfrak{sl}$-объектами, что существенно отличает эту конструкцию от ранее рассматривавшихся нами процедур квантования, где эрмитовы структуры всегда явно присутствовали.

§ 2 WZW-связность.

Итак, над многообразием модулей $\mathcal{M}_{g,1}$ кривых рода g с отмеченной (выколотой) точкой возникает векторное расслоение на пространства конформных блоков

$$V_k \xrightarrow{p_k} \mathcal{M}\ , \tag{5.7}$$

аналогичное ранее рассматривавшимся расслоениям (1.11). В конформной теории поля на этом расслоении тоже строится проективно плоская связность, конструкция которой почти параллельна построению связности Хитчина (см. § 8 главы 3), но дается, разумеется, в несколько иных терминах[1]. Основное отличие состоит в том, что вместо многообразия модулей полей Хиггса[2] задачу теперь приходится поднимать на бесконечномерное универсальное однородное пространство (5.3). Необходимая для этого машинерия работы с бесконечномерными образованиями достаточно строго представлена в [11], и мы (во избежание излишне далеких отступлений от нашей основной темы) ограничимся тут лишь очень сжатым обзором этой конструкции.

Напомним, что *ind*-однородное[3] пространство (5.3) описывает векторные SL(2)-расслоения, тривиализованные над проколотой римановой поверхностью $\Sigma \setminus \{p\}$ из $\mathcal{M}_{g,1}$. Конечно, мы собираемся рассмотреть только плотное открытое подмножество

$$Q_0 \subset Q,$$

соответствующее полустабильным расслоениям. В [20] доказано[4], что естественное отображение

$$Q_0 \xrightarrow{f} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma)$$

является локально тривиальным торсором в этальной топологии. Ив Ласло построил для таких торсоров семейство $\tau(\dot{I})$ дифференциальных операторов второго порядка над пространством деформаций комплексной структуры. Эта конструкция коммутирует с символьными гомоморфизмами ϕ_s из (1.32) на стр. 24, и из длинной когомологической последовательности точной тройки (1.31) на стр. 23 мы получаем отображения

$$H^1(\Sigma, T\Sigma) \longrightarrow H^0(S^2(T\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma))) \longrightarrow H^1_h(d_s)\ ,$$

дающие (по модулю *ind*-схемотехнических деталей) подъем тензора Суговары $\tau(\dot{I})$. Теперь для любой функции f на $\mathcal{M}_{g,1}$ и локального сечения $\widetilde{e}$ расслоения на пространства $\mathcal{H}^*_k$ над $\mathcal{M}_{g,1}$ действие

[1] см. [69] или замечательный обзор [63]

[2] т. е. пространства классов представлений фундаментальной группы кривой, но только на этот раз в SL, а не в SU

[3] термин взят из [11]

[4] еще одно доказательство этого факта имеется в широко известном неопубликованном препринте Бейлинсона и Каждана

искомой нами WZW-связности описывается формулой

$$\nabla(f\otimes\widetilde{s}) = \dot{I}(f)\cdot\widetilde{s} + \frac{1}{2k-4}T(\dot{I})\,(\widetilde{s}\otimes f) \qquad (\mathrm{mod}\ \widetilde{s}\otimes f)\ , \qquad (5.8)$$

из которой очевидно ее совпадение со связностью Хитчина из § 8 главы 3 — как и там, единственное нетривиальное слагаемое в (5.8) приходит из тензора Суговары, соответствующего хитчинскому (3.51).

§ 3 Монодромные представления.

Многообразие модулей кривых $\mathcal{M}_g = \tau_g/\mathfrak{M}_g$ является фактором *пространства Тейхмюллера* τ_g по действию *модулярной группы* $\mathfrak{M}_g = \mathrm{Diff}^+\Sigma/\mathrm{Diff}_0\Sigma$, и проективно плоские расслоения вида (5.7) индуцируются линейными или проективными *монодромными представлениями* этой группы:

$$\mathfrak{M}_g \xrightarrow{\varrho} \mathbb{P}\mathrm{GL}(N_k,\mathbb{C})\ , \quad N_k = \mathrm{rk}V_k\ .$$

Так, в классической теории абелевых ϑ-функций проективно плоская связность Уелтерса (которая строится средствами расширенной теории Кодаиры– Спенсера[1]) определяет представление

$$\mathfrak{M}_g \xrightarrow{\mu_w^k} \mathbb{P}\mathrm{GL}(k^g,\mathbb{C})\ .$$

С другой стороны, симплектическая теория ϑ-функций (см. [43]) доставляет другую комбинаторную связность и *a priori* другое представление

$$\mathfrak{M}_g \xrightarrow{\mu_{\mathrm{BS}}^k} \mathbb{P}\mathrm{GL}(k^g,\mathbb{C}).$$

К счастью, из-за наличия здесь *полного квантования*, эти две связности естественно отождествляются и дают единое *абелево* представление $\mu_{\mathrm{Ab}}^k = \mu_w^k = \mu_{\mathrm{BS}}^k$ с конечной группой монодромии

$$\mu_{\mathrm{Ab}}^k(\mathfrak{M}_g) = \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z})\ .$$

[1] см. § 4 главы 1 и [78]

В неабелевом случае мы имеем представление

$$\mathfrak{M}_g \xrightarrow{\mu_H^k} \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathrm{rk}_g(\varnothing), \mathbb{C}), \tag{5.9}$$

заданное связностью Хитчина. Дж. Андерсен доказал[2], что при $k \to \infty$ эти представления *асимптотически точны*:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \ker(\mu_H^k) = \begin{cases} 1, \text{ при } g > 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ при } g = 2 \end{cases}$$

(это верно для векторных расслоений любого ранга).

С другой стороны, есть и чисто комбинаторное монодромное представление

$$\mathfrak{M}_g \xrightarrow{\mu_c^k} \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathrm{rk}_g(\varnothing), \mathbb{C}) \ , \tag{5.10}$$

которое возникает из связности, построенной Коно[3] методами, аналогичными описанным в предыдущей главе, в которых разложение слоев V_k в прямую сумму одномерных подпространств вида (4.15) определяется разложением представления со старшим весом аффиной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ по собственным подпространствам оператора L_0 суговаровского представления алгебры Вирасоро. Представление (5.10) по построению *эрмитово*, и как показали Максбаум и Фьюнар, его группа монодромии бесконечна при $k \neq 2$, 3, 4, 6 и $k \neq 10$ для $g = 2$.

Участие конструкции Суговары в построении связности (5.10) наводит на мысль, что оба представления должны быть эквивалентны. В [72] это удалось доказать при помощи отображения Бортвика – Пола – Урибе (метод весьма далекий от конформной квантовой теории поля), но обобщенная конструкция Суговары из [64] позволяет смотреть на это совпадение как на прямое следствие теории Книжника – Замолодчикова.

---

[2]см. [5], где показано, что теплицевы операторы на слоях V_k, ассоциированные гладким функциям на $\mathcal{M}^{ss}$, являются асимптотически плоскими

[3]с использованием отождествлений из [68] и [69]; см. [44]

Глава 6.
ТРИВАЛЕНТНЫЕ ГРАФЫ

§ 1 Спинсетки.

Фриден и Шенкер ([25]), а также Мур и Зайберг ([48]) предложили аксиоматическое описание рациональной конформной теории поля втерминах *тривалентных графов*, уже встречавшихся нам в главе 4.

Мы уже видели (см. рис. 3 и рис. 4 на стр. 83,84), что каждый такой граф Γ рода g задает разрезание римановой поверхности Σ рода g на штаны. Аналогичные разметки можно рассматривать и на ориентированной римановой поверхности с n дырками: комбинаторная геометрия такой разметки кодируется так называемой *историей*[1] — двойственным графом Γ рода g и валентности 3–1 с n «висячими» *параболическими ребрами* $a_1, a_2, \dots, a_n$, отвечающими выколотым точкам.

В этом случае множество $W^k_\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *допустимых целочисленных весов* состоит из функций w вида (4.16):

$$E(\Gamma) \xrightarrow{w} [\,0\,,\,1\,] \cap \frac{1}{2k}\,\mathbb{Z} = \left\{0,\, \frac{1}{2k},\, \frac{1}{k},\, \frac{3}{2k},\, \dots\,,\, 1\right\}\,, \tag{6.1}$$

которые удовлетворяют трем условиям со стр. 87, а на всех параболических ребрах $a_1, a_2, \dots, a_n$ принимают фиксированные

[1] или *диаграммой Фейнмана*

постоянные значения $w(a_i) = \alpha_i$. И как и в § 3 главы 4, с такой разметкой связано пространство волновых функций (4.22):

$$\mathcal{H}^k_{\Gamma,\,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \bigoplus_{w\in W^k_\Gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} \mathbb{C}\cdot w\,. \tag{6.2}$$

Если умножить вес (6.1) на номер уровня k, то получится отображение

$$j \overset{\mathrm{def}}{=} k\cdot w\,:\ E(\Gamma) \longrightarrow \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}_{\geqslant 0} = \mathfrak{IR}\,(\mathrm{SU}(2))\ , \tag{6.3}$$

значение которого можно интерпретировать как половину размерности (*спиновое число*) неприводимого представления группы SU(2), что позволяет связать с каждым целочисленным весом «раскраску»[2] всех ребер e графа Γ неприводимыми представлениями $j(e) \in \mathfrak{IR}\,(\mathrm{SU}(2))$. Условие (3) со стр. 87 означает при этом, что для любых трех ребер e_1, e_2, e_3, сходящихся в одной вершине v, в разложении Клебша – Гордана (5.5) тензорного произведения представлений $j(e_1)\otimes j(e_2)\otimes j(e_3)$ на неприводимые содержится тривиальное представление! Иначе говоря, в каждой вершине v имеется *сплетающий оператор* (т. е. SU(2)-эквивариантный гомоморфизм):

$$j(e_1)\otimes j(e_2) \xrightarrow{\ i_v\ } j(e_3)\ .$$

Итак, множество допустимых весов $W^k(\Gamma)$ есть не что иное, как множество $\mathfrak{S}^k$ SU(2)-спинсеток уровня k на графе Γ:

$$\mathfrak{S}^k_\Gamma = W^k(\Gamma)\ .$$

В § 3 главы 6 (см. стр. 114) мы дадим еще одну интерпретацию для множества допустимых весов: произведение целочисленного веса $w \in W^k(\Gamma)$ на удвоенное значение уровня

$$E(\Gamma) \xrightarrow{\ 2kw\ } \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \tag{6.4}$$

[2]Пенроуз в [57] назвал такую раскраску SU(2)-*спинсеткой* уровня k, см. также [70]

является *топологическим типом петли* на графе Γ, т. е. определяет элемент его фундаментальной группы $\pi_1(\Gamma)$. Это означает, что множество допустимых весов $W^k(\Gamma)$ однозначно определяется топологией графа Γ.

В этой главе мы собираемся, следуя Коно [43] и пользуясь только комбинаторно-топологическими исходными данными, построить голоморфное векторное расслоение с голоморфной проективно плоской связностью и слоем (6.2) над многообразием модулей $\mathcal{M}_g$ римановых поверхностей рода g. Для этого нам понадобятся комбинаторная модель пространства Тейхмюллера, некоторые комплексы, связанные с тривалентными графами, и умение сравнивать пространства $\mathcal{H}^k_\Gamma$ для разных графов Γ рода g. Все идеи и конструкции, которые мы будем при этом использовать, пришли из маломерной топологии и конформной теории поля.

§ 2 Трехмерная топология.

Каждый тривалентный граф описывает разрезание на штаны римановой поверхности, которая ограничивает трехмерное тело с ручками, получающееся утолщением исходного графа. Говоря точнее, всякий максимальный набор попарно негомотопных ориентированных окружностей (4.6):

$$\{C_1, C_2, \dots, C_{3g-3}\}$$

на римановой поверхности Σ рода g разрезает ее на $(2g-2)$ ориентированных штанов (4.8) (см. рис. 3 на стр. 83):

$$\Sigma \setminus \bigl(C_1 \sqcup C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_{3g-3}\bigr) = \bigcup_{i=1}^{2g-2} P_i \ ,$$

а каждые ориентированные штаны P_i ограничивают трехмерное тело, на которое они надеты, и, склеивая эти тела вместе, мы получаем тело с ручками H_Γ, границей которого является исходная риманова поверхность $\partial H_\Gamma = \Sigma_\Gamma$ и которое можно стянуть на тривалентный граф Γ (см. рис. 6 на стр. 105).

Любой элемент $h \in \mathfrak{M}_g$ модулярной группы

$$\mathfrak{M}_g = \mathrm{Diff}^+(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$$

задает компактное трехмерное многообразие без края

$$X_\Gamma = H_\Gamma \underset{h}{\cup} H_\Gamma\ , \qquad (6.5)$$

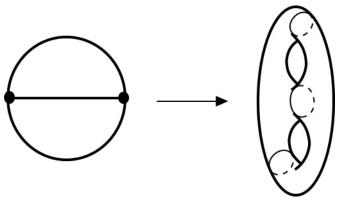

Рис. 6. Утолщение графа.

получающееся склейкой двух экземпляров H_Γ вдоль границы диффеоморфизма $\Sigma_\Gamma \xleftrightarrow{h} \Sigma_\Gamma$. Представление компактного трехмерного многообразия X парой (Γ, h) в виде (6.5) называется его *разложением Хегора*. Две пары (Γ, h_1), $(\Gamma, h_2 1)$ *эквивалентны*, если они задают гомеоморфные трехмерные многоообразия.

Подгруппа $\mathfrak{M}_\Gamma \subset \mathfrak{M}_g$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $\Sigma_\Gamma \xrightarrow{\sim} \Sigma_\Gamma$, которые продолжаются до диффеоморфизмов $H_\Gamma \xrightarrow{\sim} H_\Gamma$, действует на $\mathfrak{M}_g$ слева и справа, и диффеоморфизмам h из одного двойного смежного класса в

$$\mathfrak{M}_\Gamma \backslash \mathfrak{M}_g / \mathfrak{M}_\Gamma$$

отвечают эквивалентные разложения Хегора. Очевидно, что добавление к разложению Хегора (6.5) еще одной ручки, на которую h продолжается тождественно (эта процедура называется *стабилизацией*), приводит к эквивалентному разложению.

Предложение 1 (Зингер, [65]). *Отношение эквивалентности между разложениями Хегора порождается стабилизацией, левым и правым действием $\mathfrak{M}_\Gamma$ и изотопиями.*

Мы собираемся построить инвариант трехмерных многообразий, сопоставляя разложению Хегора (6.5) некоторый вектор

$$I(X_\Gamma) \in \mathcal{H}_\Gamma^k$$

в пространстве волновых функций (6.2). В этом пространстве имеется выделенный базисный вектор $w_0 \in \mathcal{H}_\Gamma^k$ (так называемый *вакуумный вектор*) — это нулевая весовая функция

$$w_0(e) = 0 \quad \forall\, e \in E(\Gamma)\ .$$

Если бы нам удалось ввести на $\mathcal{H}_\Gamma^k$ эрмитову структуру и построить линейное представление модулярной группы

$$\mathfrak{M}_g \xrightarrow{\ \varrho\ } \mathrm{GL}(\mathcal{H}_\Gamma^k)\ , \tag{6.6}$$

сохраняющее вакуумный вектор, то в качестве искомого инварианта сгодился бы вектор

$$I_g(X_\Gamma) = \frac{\langle w_0,\, \varrho(h)\, w_0\rangle}{||w_0||^2}\ , \tag{6.7}$$

поскольку такая нормализация делает его инвариантным относительно стабилизации. Но на самом деле все будет чуть сложнее: представление (6.6), построенное Коно, не линейно, но проективно, т. е. «почти линейно» — определено с точностью до фазового множителя

$$e^{\frac{\pi i k}{4k+8}}\ , \tag{6.8}$$

поэтому и инвариант (6.7) будет определен с точностью до множителя (6.8). Комбинаторика, необходимая для построения такого проективного представления, излагается в следующем параграфе.

§ 3 Геометрия графов.

Граф — это одномерный клеточный комплекс, состоящий из ребер — клеток одномерного скелета и вершин — клеток нульмерного скелета. Как геометрический объект, каждый граф Γ составлен из следующих частей:

- $E(\Gamma)$ — множество ребер;
- $V(\Gamma)$ — множество вершин;
- $S(v)$ — звезда вершины v (множество исходящих из v ребер);
- $L(\Gamma)$ — множество 1-петель (ребер с одной вершиной);
- $\overrightarrow{E}(\Gamma)$ — множество ориентированных ребер (т. е. пар "ребро"+ "одна из двух ориентаций этого ребра"); $F(\Gamma) = \{v \in e\}$ — множество флагов (т. е. пар «ребро » + «его вершина»).

Любое ориентированное ребро $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}(\Gamma)$ называется *путем длины 1* на графе Γ. Каждый такой путь имеет *начало* $v_s(\overrightarrow{e})$ и *конец* $v_t(\overrightarrow{e})$, совпадающие для 1-петель. Путем длины d называется упорядоченная последовательность $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d)$ ориентированных ребер, в которой $v_t(\overrightarrow{e}_i) = v_s(\overrightarrow{e}_{i+1})$ $\forall$ i. Если при этом $v_t(\overrightarrow{e}_d) = v_s(\overrightarrow{e}_1)$, то путь называется *$d$-петлей*. Если $e_i \neq e_{i+1}$ ни для какого i, путь называется *неприводимым*.

Граф называется *d-валентным*, если все его вершины имеют одну и ту же валентность d (каждая вершина служит концом ровно для d ребер). Например, замкнутый одновалентный граф является конечным несвязным набором полуинтервалов, а двувалентный — набором окружностей. Граф валентности 3–1 ([1]) имеет тривалентные (т. е. «внутренние») и одновалентные (т. е. «висящие», или «концевые») вершины, которые называются *параболическими*.

[1] т. е. комбинаторный инвариант проколотой римановой поверхности, разрезанной на штаны, или фейнмановская диаграмма в квантовой ϕ^3-теории поля; тривалентный граф без параболических вершин в квантовой теории поля называется *поляризованным вакуумом*

Для *тривалентного* графа естественные проекции

$$E(\Gamma) \xleftarrow{p_e} F(\Gamma) \xrightarrow{p_v} V(\Gamma)$$

есть накрытия степени 2 и 3 с ветвлением в одном и том же подмножестве $R_e = L(\Gamma)$, состоящем из пар $v \in e$, происходящих из 1-петель, так что мощности этих множеств связаны соотношением $2|E(\Gamma)| - |L(\Gamma)| = |F(\Gamma)| = 3|V(\Gamma)| - |L(\Gamma)|$, и значит, $|V(\Gamma)| = 2g - 2$, а $|E(\Gamma)| = 3g - 3$, где $g > 1$ — некоторое натуральное число, называемое *родом* графа Γ. Отметим, что

при $g > 11$ не известно ни точного значения, ни хороших оценок для числа $\mathfrak{T}_g$ тривалентных графов рода g.

Произвольный граф Γ допускает два стандартных преобразования, называемые *стягиванием* ребра и *раздутием* вершины. Первое устраняет некоторое ребро $e \in E(\Gamma)$, склеивая его концы в одну новую вершину v_{new}, а второе — превращает некоторую вершину $v \in V(\Gamma)$ в новое ребро e_{new}, добавляя две новые вершины $v'_{\mathrm{new}} \sqcup v''_{\mathrm{new}} = \partial e_{\mathrm{new}}$ и распределяя между ними старые ребра, входившие в v, согласно некоторому разбиению

$$S(v) = S(v'_{\mathrm{new}}) \sqcup S(v''_{\mathrm{new}}) \ .$$

Стягивание уменьшает $|E(\Gamma)|$ и $|V(\Gamma)|$ на единицу и за конечное число шагов превращает любой граф Γ в тривиальный граф $\Gamma_{\min}$, состоящий из единственной вершины без ребер. С другой стороны, раздутия позволяют превратить произвольный граф Γ, все вершины которого не менее чем тривалентны, в чисто тривалентный граф $\Gamma_{\max}$. Множество всевозможных тривалентных расширений $\Gamma_{\max}$ данного графа Γ называется *гнездом* графа Γ и обозначается $\mathcal{E}(\Gamma)$. Множество различных способов превращения данной вершины $v \in V(\Gamma)$ с $|S(v)| > 3$ в тривалентную вершину цепочкой последовательных раздутий находится во взаимно однозначном соответствии с параболическими тривалентными деревьями с фиксированным множеством параболических («висячих») вершин $\partial T = S(v)$. Совокупность таких деревьев обозначается

$\mathcal{E}(v)$. Ясно, что

$$|\mathcal{E}(v)| = \sum_{T \mid \partial T = S(v)} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(T)|}\,.$$

Например, для графа Γ с одной четырехвалентной вершиной v $|\mathcal{E}(\Gamma)| = |\mathcal{E}(v)| = 3$, а для d-валентных вершин $v \in V(\Gamma)$

$$|\mathcal{S}(v)| = \frac{1}{d-1}\, C_{d-2}^{2d-4}$$

– числа Каталана.

У каждого тривалентного графа Γ есть *ближайшие родственники*, связанные с ним композицией стягивания и раздутия, не изменяющей $|V(\Gamma)|$ и $|E(\Gamma)|$: сначала стянем некоторое ребро e с

$$\partial e = v' \sqcup v''\,,\ S(v') = e \sqcup e_1' \sqcup e_2'\,,\ S(v'') = e \sqcup e_1'' \sqcup e_2'',$$

а потом раздуем образовавшуюся при этом новую четырехвалентную вершину v_{new} по произвольному разбиению ее звезды $S(v_{\mathrm{new}}) = \{e_1',\, e_2',\, e_1'',\, e_2''\}$ на две пары ребер. Например, разбиение $S(v_{\mathrm{new}}) = \{e_1', e_1''\} \sqcup \{e_2', e_2''\}$ (см. рис. 7) приводит к появлению нового ребра e_{new} с концами в двух новых вершинах v_1 и v_2, так что $\partial e_{\mathrm{new}} = v_1 \sqcup v_2$, $S(v_1) = e_{\mathrm{new}} \sqcup e_1' \sqcup e_1''$, $S(v_2) = e_{\mathrm{new}} \sqcup e_2' \sqcup e_2''$.

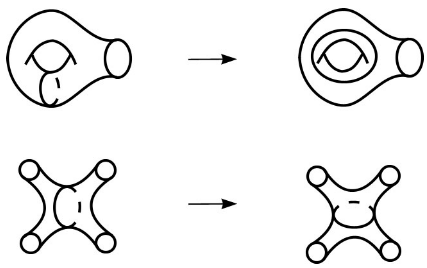

Рис. 7. Элементарные преобразования

Определение 1. Описанная только что композиция стягивания и раздутия $\Gamma \longmapsto \Gamma_e'$ называется *элементарным преобразованием*[2]

[2]ниже, на стр. 116 мы увидим, что эти преобразования соответствуют *элементарным перекройкам* разрезания римановой поверхности на штаны

графа Γ в ребре e. Отметим, что при этом имеется *каноническая биекция*

$$E(\Gamma) \xrightarrow{\nabla} E(\Gamma'_e) \ : \quad \nabla(e) = e_{\mathrm{new}} \ . \tag{6.9}$$

Нетрудно показать (например, индукцией по g), что любой тривалентный граф Γ может быть преобразован в любой другой тривалентный граф Γ' того же рода конечной цепочкой элементарных преобразований. Таким образом, элементарные преобразования транзитивно действуют на множестве $\mathfrak{T}_g$ тривалентных графов рода g.

Так как стягивания и раздутия сохраняют *ленточную структуру*, вся описанная только что комбинаторика[3] в равной мере применима и к так называемым *ленточным графам*. Напомним, что структура ленточного графа на Γ задается фиксацией циклического порядка на каждой его звезде, что эквивалентно вложению графа в ориентированную риманову поверхность или двумерному утолщению его ребер до «ленточек».

Задание ленточной структуры на d-валентном графе означает задание на нем *связности*[4]: для каждого ориентированного ребра возникает отождествление звезд

$$S(v_s(\overrightarrow{e})) \xrightarrow[\sim]{\nabla_{\overrightarrow{e}}} S(v_t(\overrightarrow{e})) \ : \quad \nabla_{\overrightarrow{e}}(e) = e \quad \forall \ \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}$$

(набор $\nabla = \{\nabla_{\overrightarrow{e}}\}_{\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}}$ таких отождествлений и называется *связностью* на Γ). Путь $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_d)$ называется *геодезической*, если $\nabla_{\overrightarrow{e}_{i+1}}(e_i) = e_{i+2}$ (где, разумеется, $i \in \{1 + \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}$, если речь идет о d-петле, т. е. о *замкнутой геодезической*). Подграф $\Gamma' \subset \Gamma$ называется *вполне геодезическим*, если любая геодезическая, начинающаяся в Γ', не выходит из этого подграфа.

Всякая замкнутая геодезическая $\ell = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_d)$ определяет в каждой вершине v, через которую она проходит, оператор

---

[3]в физической литературе называемая *диаграммной техникой Фейнмана* для описания стандартных схем спаривания

[4]см. [10], где графы рассматриваются как многообразия; в квантовой теории поля ленточные графы возникают, например, в *матричных моделях* — см. [52] и [53]

монодромии $S(v) \xrightarrow{m_v} S(v)$, переставляющий ребра этой звезды. Таким образом, каждой замкнутой геодезической на d-валентном графе со связностью отвечает смежный класс $m(\ell) \in \mathrm{Conj}(S_d)$ группы S_d перестановок d элементов. Замкнутая геодезическая ℓ называется *плоской*, если $m(\ell) = \mathrm{Id}$.

Поскольку для любой пары ребер из одной звезды существует единственная проходящая через эти ребра геодезическая, связность ∇ однозначно восстанавливается по множеству G_Γ неприводимых замкнутых геодезических на Γ, и отображение

$$G_\Gamma \xrightarrow{c_\nabla} \mathrm{Conj}(S_d) \tag{6.10}$$

является главным комбинаторным инвариантом связности ∇. При этом множество плоских геодезических

$$G_\Gamma^F = m^{-1}(\mathrm{Id})$$

является прообразом единичного класса, а само отбражение (6.10) инвариантно относительно действия *комбинаторной калибровочной группы*

$$\mathcal{G} = \prod_{v \in V(\Gamma)} S_v$$

($S_v = \mathrm{Aut}(S(v)) \simeq S_d$ есть группы перестановок ребер звезд), действующей на множестве $\mathcal{A}_\Gamma$ всех связностей на Γ по правилу:

$$g(\nabla)_{\vec{e}} = g_{v_s(\vec{e})} \circ \nabla_{\vec{e}} \circ g^{-1}_{v_t(\vec{e})} , \tag{6.11}$$

где g_v есть компоненты разложения элемента $g \in \mathcal{G}$. Таким образом, функция (6.10) поднимается с множества орбит $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Заклеивая каждую неприводимую плоскую замкнутую геодезическую ленточного графа Γ со связностью ∇ ориентированной двумерной клеткой, мы получаем двумерный ориентированный клеточный комплекс $C_\nabla(\Gamma)$. Ленточный граф называется *плоским*, если $C(\Gamma) = S^2$ является 2-сферой.

Вернемся, однако, к обычным графам без ленточной структуры. Обозначим через $P_d(\Gamma)$ множество всех неприводимых путей длины d в Γ и рассмотрим два отображения

$$P_d(\Gamma) \xrightarrow{v_s} V(\Gamma) , \quad P_d(\Gamma) \xrightarrow{v_t} V(\Gamma) ,$$

сопоставляющие пути $p = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d)$ его начало $v_s(p) = v_s(\overrightarrow{e}_1)$ и конец $v_t(p) = v_t(\overrightarrow{e}_d)$. Множество неприводимых ориентированных d-петель $L_d(\Gamma) = (v_s \times v_t)^{-1}(\Delta)$ можно описать как прообраз диагонали при отображении

$$P_d(\Gamma) \xrightarrow{v_s \times v_t} V(\Gamma) \times V(\Gamma)\ .$$

В частности, $L_{d,v}(\Gamma) = (v_s \times v_t)^{-1}(v)$ состоит из неприводимых ориентированных d-петель, начинающихся и кончающихся в отмеченной вершине v, и объединение

$$\pi_1^v(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{d=1}^{\infty} L_{d,v}(\Gamma) \tag{6.12}$$

допускает очевидную групповую структуру. Для связных графов имеется естественное отождествление

$$\pi_1^v(\Gamma) \xrightarrow{r} \pi_1(\Gamma)$$

этой группы со стандартной фундаментальной группой графа Γ как одномерного клеточного комплекса. Например, фундаментальная группа тривалентного графа рода g есть свободная группа с g образующими: $\pi_1(\Gamma) = F_g$.

Индуктивное изучение тривалентных графов основывается на том, что любой такой граф получается из несвязного объединения 1-петель применением конечной цепочки *элементарных преобразований* $\Gamma \longmapsto \Gamma_e$, удаляющих из графа какое-нибудь ребро e с различными концами $v_1 \sqcup v_2 = \partial e$ и сшивающих оставшуюся в каждом из концов пару ребер $\{e_i', e_i''\} = S(v_i) \setminus \{e\}$ в одно новое «длинное» ребро $e_i^{\text{new}} = e_i' \underset{v_i}{\cup} e_i''$, а также *обратных элементарных преобразований* $\Gamma \longmapsto \Gamma_{e_1 e_2}$, которые добавляют пару новых вершин v_1, v_2 внутрь двух (возможно, совпадающих) ребер e_1, e_2 и пририсовывают к ним новое ребро e_{new} с $\partial e_{\text{new}} = \{v_1, v_2\}$. Имеется два типа задач, где возникает такого рода индукция: *задача Эйлера* и *проблема раскраски*.

Неприводимый путь $p = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d) \in P_d(\Gamma)$ называется *эйлеровым*, если он проходит каждое ребро графа, причем ровно по одному разу. Аналогично, система путей P_E называется *эйлеровой*, если каждое ребро графа ровно один раз содержится ровно в одном из путей $p \in P_E$. Минимально возможная мощность $e(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \min |P_E|$ системы эйлеровых путей является важным инвариантом графа.

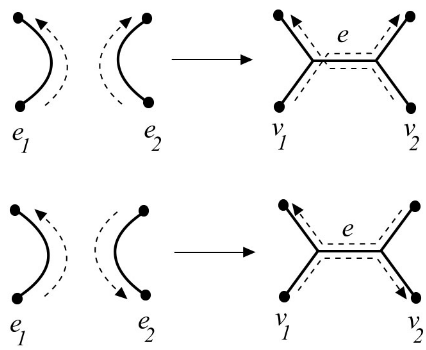

Рис. 8. Два пути

Легко видеть, что элементарное преобразование $\Gamma \longmapsto \Gamma_{e_1,e_2}$ тривалентного графа переводит эйлерову систему путей P_E на Γ в эйлерову систему путей $P^E_{e_1,e_2}$ на единицу большей мощности на Γ_{e_1,e_2} (см. рис. 8). Поскольку любой тривалентный граф цепочкой элементарных преобразований превращается в граф Γ' с $e(\Gamma') = 1$, у любого тривалентного графа Γ рода g

$$e(\Gamma) \equiv g - 1 \pmod 2 \quad \text{и } 1 \leqslant e(\Gamma) \leqslant g + 1 \, .$$

Любой плоский ленточный граф Γ можно без самопересечений уложить на плоскость $\mathbb{R}^2$. Связные компоненты дополнения к нему при этом будут образовывать «страны» географической карты, и возникает знаменитая *проблема четырех красок* для вложенных графов.

Другая задача о раскрасках приходит из фейнмановских диаграмм. Раскраска графа набором цветов $C = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$ представляет собою отображение

$$E(\Gamma) \xrightarrow{c} C \, ,$$

такое что $\forall\, v \in V(\Gamma)$ индуцированное отображение $S(v) \xrightarrow{c|_v} C$ инъективно, т. е. все ребра, выходящие из одной вершины, красятся в разные цвета (при этом, разумеется, рассматриваются только графы без 1-петель). Минимально необходимое для этого число цветов $\chi(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} N_{\min}$ называется *хроматическим числом*. Очевидно, что у любого тривалентного графа

$$3 \leqslant \chi(\Gamma) \leqslant 4\,.$$

Чуть сложнее доказать, что $\chi(\Gamma) = 3$, если и только если на Γ существует набор $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ неприводимых петель четных длин без общих ребер, проходящий через все вершины графа. А утверждение о том, что для любого плоского тривалентного графа Γ без 1-петель $\chi(\Gamma) = 3$, эквивалентно положительному решению проблемы четырех красок.

Все предыдущее можно отнести к классической теории графов. Теперь же, следуя идеям Сигала, мы рассмотрим *пространство петель* d-валентного графа, воспринимая последний (в стиле [10]) как многообразие.

Отрезок $[\,0\,,\,1\,]$ с возрастающим набором точек:

$$[\,0 = p_0,\, p_1, p_2, \ldots, p_{d-1}\,,\, p_d = 1\,]$$

представляет собою простейшую двувалентную историю с двумя параболическими ребрами $[\,0,\, p_1]$ и $[p_{d-1},\, 1\,]$, соединяя которую в точках 0 и 1, получаем двувалентный d-цикл. Всякий путь $p \in P_d$ на Γ является образом клеточного отображения

$$[\,0 = p_0,\, p_1, p_2, \ldots, p_{d-1}\,,\, p_d = 1\,] \xrightarrow{p} \Gamma\,,$$

и если p неприводим, то прообраз каждого ребра $e \in E(\Gamma)$ является несвязным объединением конечного набора компактных связных компонент (без учета ориентации)

$$p^{-1}(e) = g_1 \sqcup \ldots \sqcup g_{\mathrm{col}_p(e)},$$

число которых мы будем обозначать $\mathrm{col}_p(e)$.

В частности, каждая неприводимая (неотмеченная) петля ℓ определяет функцию

$$E(\Gamma) \xrightarrow{\mathrm{col}_\ell} \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\ , \tag{6.13}$$

которую мы будем называть *типом петли*.

Рассмотрим какую-нибудь вершину v с $S(v) = \{e_1, e_2, e_3\}$ и обозначим через n_{ij} количество входов в v по ребру e_i с выходом по ребру e_j при обходе петли ℓ. Поскольку

$$\mathrm{col}_\ell(e_i) = \sum_{j\neq i} n_{ij}\ , \tag{6.14}$$

каждая вершина $v \in V(\Gamma)$ накладывает на тип петли очевидные ограничения:

$$\begin{gathered} \mathrm{col}_\ell(e_1) + \mathrm{col}_\ell(e_2) + \mathrm{col}_\ell(e_3) \equiv 0 \pmod 2 \\ |\mathrm{col}_\ell(e_1) - \mathrm{col}_\ell(e_2)| \leqslant \mathrm{col}_\ell(e_3) \leqslant \mathrm{col}_\ell(e_1) + \mathrm{col}(e_2) \end{gathered} \tag{6.15}$$

Скажем, что петля ℓ имеет *уровень* k, если $\mathrm{col}_\ell(e) \leqslant k$ для любого ребра $e \in E(\Gamma)$. Ясно, что для петель уровня k нижняя строчка в (6.15) заменяется чуть более сложным условием

$$\begin{aligned} &|\mathrm{col}_\ell(e_1) - \mathrm{col}_\ell(e2)| \leqslant \mathrm{col}_\ell(e_3) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \min\bigl(\mathrm{col}_\ell(e_1) + \mathrm{col}(e_2), 2k - \mathrm{col}_\ell(e_1) - \mathrm{col}(e_2)\bigr)\ , \end{aligned} \tag{6.16}$$

отличающимся от предыдущего *плоского* неравенства треугольника тем, что представляет собою неравенство треугольника *на сфере* радиуса $\sim \sqrt{k}$. Поэтому довольно естественно называть петли уровня k *узлами*. Напомним также (см. стр. 103), что деля тип узла пополам, мы получаем функцию (6.13), раскрашивающую ребра нашего графа неприводимыми представлениями $\mathrm{SU}(2)$, и условия (6.15) и (6.16) означают при этом, что пара $(\Gamma, \mathrm{col}_\ell)$ задает $\mathrm{SU}(2)$-спинсетку.

§ 4 Петлевой комплекс, комплекс раскроек и комплекс графов.

Напомним, что мы называем *окружностью* на ориентированной поверхности $\Sigma_{g,n}$ рода g с n выколотыми точками изотопический класс простой замкнутой нестягиваемой петли C, не изотопный никакой компоненте границы.

Петлевой симплициальный комплекс $C(\Sigma_{g,n})$ кривой $\Sigma_{g,n}$ имеет в качестве i-мерных симплексов наборы из $(i+1)$ попарно непересекающихся окружностей с очевидными примыканиями граней. Его одномерный остов состоит из пар непересекающихся окружностей, а симплексы максимальной размерности $3g-3$ отвечают разрезаниям (4.8) поверхности $\Sigma_{g,n}$ на $2g-2$ штанов.

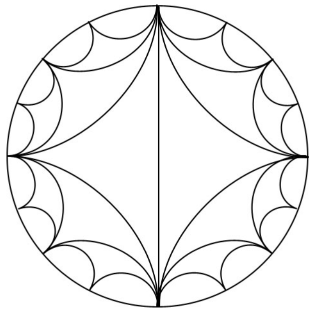

Рис. 9. Граф Фарея.

В двух важных специальных случаях: для $\Sigma_{0,4}$ и $\Sigma_{1,1}$, где нет ни одной пары таких непересекающихся петель, определение немного меняется — две вершины петлевого комплекса соединяются ребром, если окружности имеют 2 пересечения (на $\Sigma_{0,4}$) и 1 пересечение (на $\Sigma_{1,1}$), так что $C(\Sigma_{0,4}) = C(\Sigma_{1,1})$ оказывается *идеальной триангуляцией*[1] двумерного диска (см. рис. 9).

Еще имеется бесконечный *граф штанов* $\Pi(\Sigma)$, имеющий вершинами всевозможные раскройки (4.8) поверхности $\Sigma_{g,n}$ на $2g-2$ штанов, и две такие вершины соединяются ребром, если соответствующие разрезания получаются друг из друга *элементарной перекройкой*: одна из окружностей, скажем, C_1, заменяется на новую окружность C_1' (см. рис. 7 на стр. 109), которая пересекает исходную дважды, если попадает в те же самые штаны, и единожды — в противном случае.

Этот бесконечный граф имеет каноническую клеточную проекцию

$$V\big(\Pi(\Sigma)\big) \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{T}_g \tag{6.17}$$

[1] или так называемым *графом Фарея*

на конечный граф $\mathfrak{T}_g$, вершинами которого служат все тривалентные графы, и две вершины соединяются ребром, когда соответствующие им графы связаны элементарным преобразованием в смысле[2] опр. 1 из § 3 главы 6 (см. стр. 109). Слои проекции (6.17) есть

$$\gamma^{-1}(\Gamma) = \mathfrak{M}_g/\mathrm{Aut}(H_\Gamma) \ ,$$

где $\mathrm{Aut}(H_\Gamma)$ — группа изотопических классов ориентированных диффеоморфизмов $\Sigma \longrightarrow \Sigma$, которые можно продолжить до диффеоморфизмов $H_\Gamma \longrightarrow H_\Gamma$ тела с ручками, ограниченного поверхностью Σ.

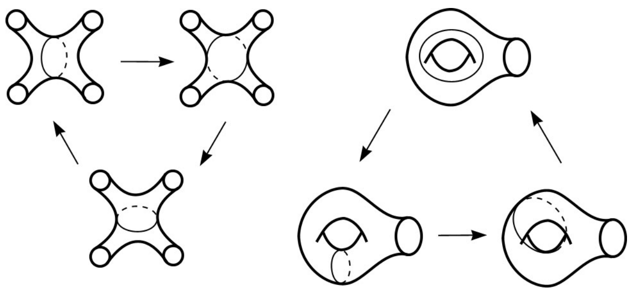

Рис. 10. Треугольники

Важнейшим для дальнейшего является также отождествление

$$\mathfrak{M}_g = \mathrm{Aut}\big(C(\Sigma_g)\big) \tag{6.18}$$

модулярной группы[3] с группой клеточных автоморфизмов петлевого комплекса.

[2]которое в точности соответствует описанной выше элементарной перекройке разложения на штаны

[3]по теореме Руадена, $\mathfrak{M}_g = \mathrm{Isom}(\tau_g)$ совпадает с группой изометрий пространства Тейхмюллера τ_g в метрике Тейхмюллера; более того, метрические пространства $C(\Sigma_{g,n})$ и τ_g вообще очень близки: например, $C(\Sigma_{g,n})$ является δ-гиперболическим ([51]); то же самое справедливо и в метрике Вейля – Петерсона

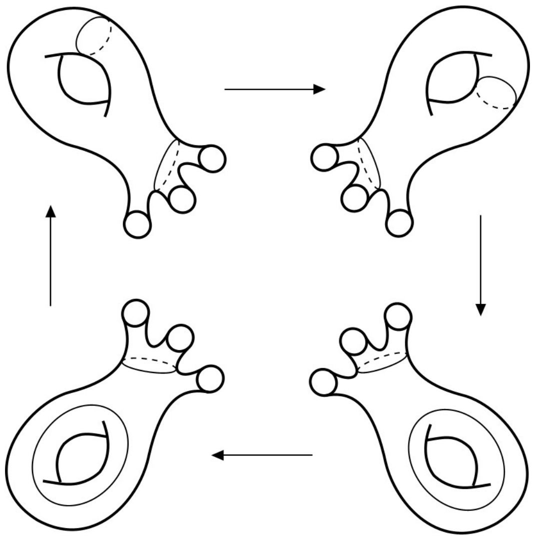

Рис. 11. Четырехугольники

Граф $\mathfrak{T}_g$ является одномерным остовом конечного дву мерного клеточного комплекса $C(\mathfrak{T}_g)$, который мы называем *комплексом графов*. Строится он так. Сначала все коммутативные треугольники элементарных преобразований заклеиваются двумерными клетками. Прообразами таких треугольников при проекции (6.17) являются изображенные на рис. 10 (стр. 117) треугольники бесконечного графа Π, и с точностью до этих треугольников на нашем исходном графе $\mathfrak{T}_g$ имеется каноническая связность (6.9). Поэтому, применяя технику геодезических, описанную на стр. 111, удается заклеить клетками и все остальные соотношения между элементарными преобразованиями и построить[4] односвязный двумерный комплекс $C(\mathfrak{T}_g) = C_\nabla(\mathfrak{T}_g) \simeq S^2$, гомеоморфный сфере.

Тем самым, граф $\mathfrak{T}_g$ оказывается плоским (в частности, про него можно задать все классические вопросы: о хроматическом числе и т. п.), ну а в двух специальных случаях

$$C_1(\Pi(\Sigma_{0,4})) = C_1(\mathfrak{T}(\Sigma_{1,2})) = C_1(\Sigma_{0,4}) = C_1(\Sigma_{1,2}) \qquad (6.19)$$

[4] см. [37], а также замечание в конце этого параграфа

снова является одномерным остовом комплекса Фарея.

Стандартное доказательство перечисленных выше свойств состоит в явном построении «ручками» бесконечного двумерного комплекса $C(\mathit{\Pi}(\Sigma))$ и проверке всех утверждений для него, а потом при помощи проекции (6.17) результаты спускаются на комплекс $C(\mathfrak{T}_g)$.

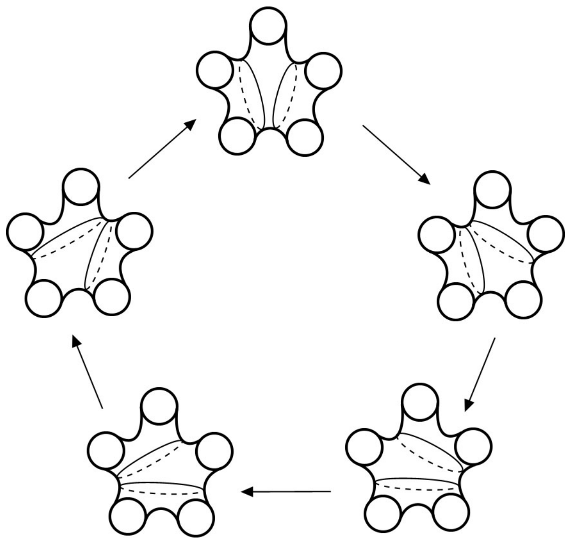

Рис. 12. Пятиугольники

Двумерными клетками бесконечного комплекса $C(\mathit{\Pi})$ являются соотношения между элементарными преобразованиями, т. е. петли графа $\mathit{\Pi}$. Они бывают трех-, четырех-, пяти- и шестиугольными и приходят из фрагментов поверхностей с меньшими g и n, встречающихся при раскрое на штаны данной поверхности $\Sigma_{g,n}$, а именно: треугольные соотношения возникают на кусках $\Sigma_{1,1}$ и $\Sigma_{0,4}$ (см. рис. 10 на стр. 117), четырехугольные — на $\Sigma_{1,3} = \Sigma_{1,1} \cup \Sigma_{0,4}$ (см. рис. 11 на стр. 118), пятиугольные — на $\Sigma_{0,5}$ (см. рис. 12), шестиугольные — на $\Sigma_{1,2}$ (см. рис. 13 на стр. 120).

Поразительно, что двумерный комплекс $C(\mathit{\Pi})$ не несет большей информации, чем его одномерный остов $\mathit{\Pi}$, и структура его 2-клеток целиком определяются этим графом. Например, все его треугольные клетки содержатся в подкомплексах Фарея

$$C(\Pi(\Sigma_{1,1})) \quad \text{и} \quad C(\Pi(\Sigma_{0,4})) ,$$

а каждое ребро служит стороной пары треугольников, соответствующих двум подповерхностям $\Sigma_{1,1}$ и $\Sigma_{0,4}$.

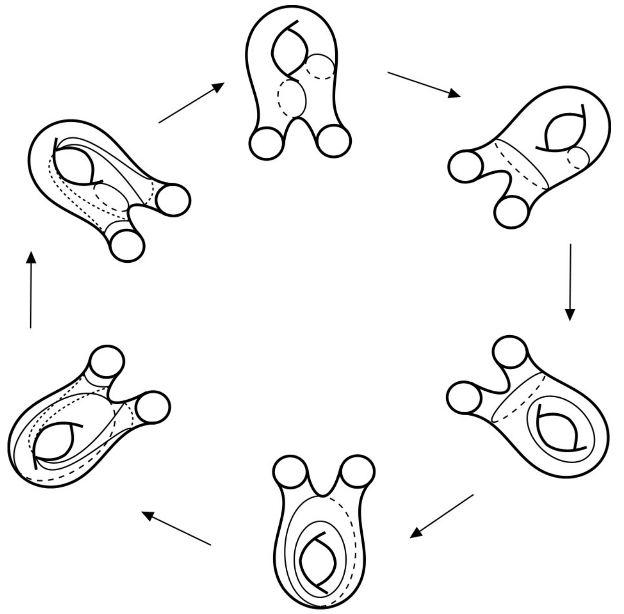

Рис. 13. Шестиугольники

Фиксация какой-нибудь вершины в любом подграфе Фарея графа Π означает выбор 0-клетки в $C(\Sigma_{g,n})$, т. е. окружности на $\Sigma_{g,n}$, поскольку выбор подграфа Фарея в Π-графе определяет раскрой на штаны (т. е. набор окружностей $(C_1, C_2, \ldots, C_{3g-3})$) с фиксированным первым разрезом C_1. Наоборот, для любой вершины $C \in C_0(\Sigma)$ существует (не единственный!) подграф Фарея, выделяющий эту вершину описанным выше образом. Действительно, дополним окружность C до полного набора разрезов $(C_1, C_2, \ldots, C_{3g-3})$ с $C_1 = C$. Все раскрои на штаны с фиксированными разрезами $(C_2, C_3, \ldots, C_{3g-3})$ составляют подграф Фарея F_C с выделенной вершиной $p \in F_C$.

Таким образом, возникает отображение

$$\mathrm{Aut}\big(C_1(\Pi)\big) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}\big(C_0(\Sigma_{g,n})\big)\,, \tag{6.20}$$

сопоставляющее окружности $C \in C_0(\Sigma_{g,n})$ единственную вершину в $C_0(\Sigma_{g,n})$, соответствующую отмеченному графу Фарея $g(p) \in g(F_C)$.

Нетривиальные[5] n-угольные соотношения (с $n = 4, 5, 6$) возникают только из неприводимых ориентированных n-петель, у которых никакая пара последовательных ребер не содержится ни в одном подграфе Фарея. Кроме того, надо исключить из рассмотрения шестиугольники, склеенные из треугольника и нетривиального квадрата. Исходя из этих простых соображений, Маргалит[6] сначала продолжил отображение (6.20) до корректно определенного отображения $\mathrm{Aut}\big(C_1(\Pi)\big) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}\big(C(\Pi)\big)$, а затем и до изоморфизма

$$\mathrm{Aut}\big(C(\Pi)\big) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}\big(C(\Sigma)\big)\ . \tag{6.21}$$

Таким образом, $\mathrm{Aut}\big(C_1(\Pi)\big) = \mathrm{Aut}\big(C(\Pi)\big) = \big(\mathrm{Aut}C(\Sigma)\big) = \mathfrak{M}_g$.

Замечание 1. Комплекс $C(\Pi)$ был введен Хетчером и Терстеном в [37], где они доказали, что он связен и односвязен, а вот изоморфизм (6.21) был получен совсем недавно в работе [50].

Замечание 2. Пространство конформных блоков WZW RCFT (см. опр. 1 из § 1 главы 5 на стр. 95) можно, как мы видели, интерпретировать как пространство голоморфных сечений тензорной степени неабелева Θ-расслоения на многообразии модулей $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ полустабильных векторных расслоений на римановой поверхности Σ (см. гл. 3). При разрезании Σ на штаны конформные блоки можно строить, интегрируя по окружностям разрезания все промежуточные состояния, возникающие отдельно на каждых штанах. Различные склейки приводят таким образом к различным базисам одного и того же векторного пространства, и эти базисы выражаются друг через друга при помощи *матриц дуальности*, удовлетворяющих *условиям согласованности*, которые удобно описывать в терминах комплекса $C(\Upsilon)$.

Поскольку комплекс $C(\Upsilon)$ связен, каждая матрица дуальности раскладывается (многими способами) в произведение простейших матриц,

[5] т. е. не склеенные из треугольников
[6] см. [50]

отвечающих элементарным перекройкам. Условия согласованности состоят в том, чтобы результирующее преобразование не зависело от способа разложения (т. е. от выбора пути на графе): произведение простейших матриц вдоль каждой петли должно быть равно единице. Все такие соотношения порождаются тождествами, возникающими из перечисленных выше n-угольных *фундаментальных петель* с $n = 3, 4, 5, 6$, и это в точности утверждение об односвязности комплекса $C(\mathfrak{T})$.

Таким образом, возникает система (некоммутативных) полиномиальных уравнений на элементарные матрицы дуальности, решения которой составляют *многообразие модулей* RCFT, и в пределе при $k \to \infty$ мы получаем алгебру слияния, которая в рассматриваемом нами SU(2)-случае совпадает с кольцом представлений $\mathfrak{RC}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$.

Пространства волновых функций (6.2) образуют подрасслоение

$$\mathcal{H}^k_{\mathfrak{T}} \subset C(\mathfrak{T}) \times \mathbb{C}^{(2k)^{3g-3}} = C(\mathfrak{T}) \times \bigoplus_{\alpha \in T^A_{2k}} \mathbb{C}_\alpha \tag{6.22}$$

в тривиальном векторном расслоении над $C(\mathfrak{T}) = S^2$, локально разложенном (см. (4.22)–(4.23)) в сумму линейных подрасслоений. И поскольку сфера односвязна, расслоение $\mathcal{H}^k_{\mathfrak{T}}$ обладает выделенной плоской тривиализацией, единственной с точностью до умножения на константу, что и дает плоское проективное расслоение Коно

$$\mathbb{P}\mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{M}_g\ .$$

А именно, система матриц дуальности (см. зам. 2 из § 4 главы 6) определяет плоскую связность на $C_1(\mathfrak{T}_g)$ с проективно тривиальной монодромией

$$\operatorname{Aut}\bigl(C_1(\mathfrak{T}_g)\bigr) \xrightarrow{\ \varrho\ } \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathrm{rk}_g(\emptyset), \mathbb{C}), \tag{6.23}$$

которая и является искомым представлением Коно.

§ 5 Калибровочная теория на графах.

Связностью на тривиальном SU(2)-расслоении над графом Γ называется отображение

$$P_1(\Gamma) = \overrightarrow{E}(\Gamma) \xrightarrow{a} \mathrm{SU}(2) \ : \quad i^*_{\downarrow\uparrow} a\,(\overrightarrow{e}\,) = a(\overleftarrow{e}\,) = a(\overrightarrow{e}\,)^{-1}\ , \quad (6.24)$$

где $i_{\downarrow\uparrow} : \overrightarrow{e} \mapsto \overleftarrow{e}$ есть смена ориентации ребра e. Пространство всех связностей (т. е. функций (6.24)) обозначим через $\mathcal{A}(\Gamma)$. Ясно, что все связности — *плоские*. Отображение

$$P_d(\Gamma) \xrightarrow{a} \mathrm{SU}(2) \ : \quad (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d) \longmapsto a(\overrightarrow{e}_1)a(\overrightarrow{e}_2)\,\cdots\, a(\overrightarrow{e}_d)$$

называется *интегралом по путям*, и изменение ориентации всех ребер обращает интеграл:

$$i^*_{\downarrow\uparrow} a(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d) = a(\overleftarrow{e}_1, \overleftarrow{e}_2, \ldots, \overleftarrow{e}_d) = a(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d)^{-1}.$$

Монодромия $L_{d,v}(\Gamma) \xrightarrow{a} \mathrm{SU}(2)$ (вдоль *отмеченных* петель) определяется аналогично.

Группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}_{\mathrm{A}} = \mathrm{SU}(2)^{V(\Gamma)}$ состоит из функций $V(\Gamma) \xrightarrow{g} \mathrm{SU}(2)$ с покомпонентным умножением и действует на пространстве связностей $\mathcal{A}(\Gamma)$ по правилу

$$g a(\overrightarrow{e}\,) = g(v_s(\overrightarrow{e}\,)) \cdot a(\overrightarrow{e}\,) \cdot g(v_t(\overrightarrow{e}\,))^{-1}\ . \qquad (6.25)$$

Поскольку на графе все связности плоские, пространство калибровочных орбит

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Gamma)/\mathcal{G}_{\mathrm{A}} &= \mathfrak{RC}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SU}(2)) = \\ &= \mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SU}(2))/\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SU}(2)) \quad (6.26)\end{aligned}$$

совпадает с пространством классов изоморфных представлений фундаментальной группы $\pi_1(\Gamma)$, которая для тривалентного графа рода g изоморфна свободной группе F_g с g образующими. Таким образом, фактор пространство (6.26) есть не что иное как *унитарное пространство Шоттки* S^u_g из § 2 главы 3 (см. стр. 56).

Калибровочная группа изоморфна полупрямому произведению

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^v(\Gamma) \rightthreetimes \mathrm{SU}(2)_\Delta$$

нормальной подгруппы $\mathcal{G}^v(\Gamma) = \{g \in \mathcal{G}_{\mathrm{A}} \mid g(v) = \mathrm{Id}\}$ калибровок, тождественных в слое над какой-либо фиксированной вершиной v, и диагональной подгруппы

$$\mathrm{SU}(2)_\Delta \subset \mathcal{G}_{\mathrm{A}}\,,\ \mathrm{SU}(2)_\Delta = \mathcal{G}_{\mathrm{A}}/\mathcal{G}^v(\Gamma)$$

постоянных функций $V(\Gamma) \xrightarrow{g} \mathrm{SU}(2)$. Фактор

$$\mathfrak{R}(\pi_1(\Gamma, v), \mathrm{SU}(2)) = \mathcal{A}(\Gamma)/\mathcal{G}^v(\Gamma) \tag{6.27}$$

состоит из орбит связностей, *отмеченных над* v, т. е. представляет собой пространство всех представлений отмеченной фундаментальной группы (оно зависит от выбора v), а фактор

$$\mathfrak{C}\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma)/\mathrm{SU}(2)_\Delta$$

совпадает с пространством постоянных связностей. Таким образом, проекцию

$$\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{RC}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SU}(2)) \tag{6.28}$$

на фактор (6.26) можно двумя способами разложить в композицию проекций:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}(\Gamma) \arrow[dl, "\pi_{\mathfrak{R}}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathfrak{C}}"] & \\ \mathfrak{R}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SU}(2)) \arrow[dr] & & \mathfrak{C}\mathcal{A}(\Gamma) \arrow[dl] \\ & \mathfrak{RC}\,(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SU}(2)) & \end{tikzcd} \tag{6.29}$$

и выбор какого-либо сечения проекции (6.28) называется *фиксацией калибровки*. Оборачивание стрелок $\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{i^*_{\downarrow\uparrow}} \mathcal{A}(\Gamma)$ задается элементом

$$g_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)_\Delta\ .$$

и тривиально действует на $\mathfrak{C}\mathcal{A}(\Gamma)$.

Классы сопряженных элементов Conj(SU(2)) можно запараметризовать отрезком $[\,0\,,\,1\,]$ при помощи *функции классов*:

$$\mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\mathrm{cj}} [\,0\,,\,1\,] \;:\quad g \longmapsto \frac{1}{\pi}\,\arccos\left(\frac{\mathrm{tr}(g)}{2}\right)\,, \tag{6.30}$$

применение которой во всех вершинах дает сюръекцию:

$$\mathfrak{C}\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{\mathrm{cj}} [\,0\,,\,1\,]^{3g-3} = \prod_{e\in E(\Gamma)} [\,0\,,\,1\,]_e\,.$$

Комбинируя ее с факторизацией (6.29), получаем проекцию

$$\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{C}}} \mathfrak{C}\mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{\mathrm{cj}} \prod_{e\in E(\Gamma)} [\,0\,,\,1\,]_e \tag{6.31}$$

с послойным действием инволюции $i_{\downarrow\uparrow}$, обращающей ориентацию ребер.

§ 6 Абелева версия: $U(1)$-спинсетки.

Хорошим вводным примером в калибровочные теории на графе Γ является абелева $U(1)$-теория, спинсетки которой являются ни чем иным, как ϑ-характеристиками в классическом исчислении ϑ-функциий.

Поскольку множество нериводимых представлений $U(1)$:

$$\mathfrak{I}\mathfrak{R}\,(U(1)) = \mathbb{Z}\,,$$

всякая $U(1)$-спинсетка на графе Γ задается некоторой функцией

$$E(\Gamma) \xrightarrow{w} \mathbb{Z} = \mathfrak{I}\mathfrak{R}\,(U(1))\ , \tag{6.32}$$

удовлетворяющей (как и в (6.3)) условиям Клебша - Гордана, которые в абелевом случае выражаются равенством

$$w(e_1) + w(e_2) + w(e_3) = 0 \tag{6.33}$$

для любой тройки ребер $\{e_1, e_2, e_3\} = S(v)$, сходящихся в одной вершине $v \in V(\Gamma)$, а спинсетки уровня k подчиняются дополнительному ограничению: $w(e) \leqslant 2k \; \forall\, e$. Множество таких спинсеток мы обозначаем через $\mathfrak{S}^k_{\mathrm{A}}$.

С другой стороны, $U(1)$-связность на графе Γ, как и выше, задается отображением

$$P_1(\Gamma) = \overrightarrow{E}(\Gamma) \xrightarrow{a} U(1) \;:\quad i^*_{\downarrow\uparrow} a\,(\overrightarrow{e}) = a(\overleftarrow{e}) = a(\overrightarrow{e})^{-1}\,, \tag{6.34}$$

индуцирующим интеграл по путям $P_d(\Gamma) \xrightarrow{a} U(1)$:

$$a(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_d) = a(\overrightarrow{e}_1) a(\overrightarrow{e}_2) \cdots a(\overrightarrow{e}_d)\,,$$

монодромию $L_{d,v}(\Gamma) \xrightarrow{a} U(1)$ и т. д. Пространство таких связностей мы обозначим через $\mathcal{A}_{\mathrm{A}}$.

Абелева калибровочная группа $\mathcal{G}_{\mathrm{A}} = U(1)^{V(\Gamma)}$, состоящая из функций $V(\Gamma) \xrightarrow{g} U(1)$, действует на пространстве связностей $\mathcal{A}_{\mathrm{A}}(\Gamma)$ по тому же правилу: $ga(\overrightarrow{e}) = g(v_s(\overrightarrow{e})) \cdot a(\overrightarrow{e}) \cdot g(v_t(\overrightarrow{e}))^{-1}$, но ее диагональная подгруппа $U(1)_\Delta \subset \mathcal{G}_{\mathrm{A}}(\Gamma)$ действует теперь тривиально, и поэтому

$$\mathcal{A}_{\mathrm{A}}(\Gamma)/\mathcal{G}_{\mathrm{A}}(\Gamma) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), U(1)) = U(1)^g \tag{6.35}$$

есть в точности абелево унитарное пространство Шоттки (2.24) из § 5 главы 2, т. е. слой проекции (2.8) над нулем тора T^g_-, δ-функция которого при преобразовании когерентных состояний (2.15) переходит в «основную» ϑ-функцию на комплексном пространстве Шоттки $(\mathbb{C}^*)^g$, дающую аналитическое выражение для ненулевого сечения Θ-дивизора на якобиане.

Пространство абелевых связностей $i_{\downarrow\uparrow}$-инвариантно вкладывается в пространство $\mathrm{SU}(2)$-связностей диагональным отображением

$$\mathcal{A}_{\mathrm{A}}(\Gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(\Gamma) \;:\quad e^{i\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix},$$

образ которого при проекции (6.31) двулистно накрывает куб, так что композиция

$$\mathcal{A}_{\mathrm{A}}(\Gamma) \xrightarrow{\;\mathrm{cj}\circ d\;} \prod_{e \in E(\Gamma)} [\,0\,,\,1\,]_e$$

есть факторизация по действию инволюции $i_{\downarrow\uparrow}$. Обозначим через

$$\mathcal{A}_{\mathrm{A}}(\Gamma) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{A}}} U(1)^g \tag{6.36}$$

каноническую проекцию пространства абелевых связностей на множество абелевых калибровочных орбит (6.35). Нетрудно проверить

Предложение 1. *Абелева проекция* (6.36) *раскладывается в композицию:*

$$\mathcal{A}_{\mathrm{A}}(\Gamma) \xrightarrow{d} \mathcal{A}(\Gamma) \xrightarrow{\pi} U(1)^g \subset \mathfrak{RC}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SU}(2)). \tag{6.37}$$

Вложим теперь якобиан кривой $J_{\Sigma_\Gamma} = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_\Gamma), U(1))$ диагонально в $\mathfrak{RC}(\pi_1(\Sigma_\Gamma), \mathrm{SU}(2))$ и рассмотрим его голдмановскую проекцию на тор действия (4.20):

$$J_{\Sigma_\Gamma} \xrightarrow{\pi_\Gamma} T^A = U(1)^{E(\Gamma)} ,$$

образом которой является g-мерный тор

$$\Delta_\Gamma \pmod{\mathbb{Z}^{3g-3}} \simeq T^g_- \subset T^A . \tag{6.38}$$

С другой стороны, деля на k весовую функцию (6.32) произвольной $U(1)$-спинсетки уровня k на графе Γ, мы получаем точку k-деления на торе действия T^A. Замечательно, что образ возникающего отображения

$$\mathfrak{S}^k_{\mathrm{A}} \xrightarrow{w \mapsto \frac{w}{k}} \left(T^A\right)_k$$

содержится в подторе (6.38), и более того,

$$\frac{1}{k}\,\mathfrak{S}^k_{\mathrm{A}} = W^k(\Gamma) = \mathrm{BS}_k(\Gamma) \subset \Delta_\Gamma = T^g_- . \tag{6.39}$$

В результате группа ϑ-характеристик канонически отождествляется с множеством спинсеток $\mathfrak{S}^k_{\mathrm{A}}$ уровня k, так что в абелевом случае мы можем нумеровать ϑ-характеристики $U(1)$-спинсетками.

Именно таким образом мы собираемся обобщать понятие ϑ-характеристики на неабелев случай.

Кроме этого нам понадобится неабелева версия преобразования когерентных состояний (2.15) для δ-функций (2.18), которое в классическом варианте из § 4 главы 2 представляло собою фрагмент стандартного гармонического анализа на торе $T_-^g = U(1)^g$. Теперь нам надо распространить технику разложений Фурье на SU(2)-случай.

§ 7 Гармонический анализ SU(2)-спинсеток.

Напомним, что мы отождествляем неприводимые представления SU(2) с полуцелыми *спиновыми числами* (половинками размерностей):

$$\mathfrak{IR}\,(SU(2)) \simeq \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}\,.$$

Разложение Клебша – Гордона тензорного произведения $j_1 \otimes j_2 \otimes j_3$ трех неприводимых представлений тогда и только тогда содержит одномерное тривиальное представление (*сплетающий оператор*), когда спинорные числа удовлетворяют неравенству треугольника:

$$|j_1 - j_2| \le j_3 \le j_1 + j_2\,. \tag{6.40}$$

Функция $E(\Gamma) \xrightarrow{\ j\ } \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}$, удовлетворяющая этому неравенству и условию

$$j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{Z}$$

для каждой звезды $S(v)$, задает на графе Γ SU(2)-спинсетку Γ_j. Мы говорим, что она имеет уровень k, если $j(e) \le k$ для любого ребра e, и в правой части неравенства треугольника (6.40) вместо $j_1 + j_2$ можно поставить $\min(j_1 + j_2, k - j_1 - j_2)$. Фиксированную спинсетку уровня k мы обозначаем через $\Gamma_{j,k}$, а множество всех таких спинсеток — через $\mathfrak{S}^k(\Gamma)$. Ясно, что $\mathfrak{S}^k(\Gamma) \subset \mathfrak{S}^m(\Gamma)$ при

$k < m$. Напомним также, что деля спинорные числа на k, мы отождествляем спинсетки с *допустимыми весами*:

$$\mathfrak{S}^k(\Gamma) = W^k(\Gamma)$$

(см. конец § 1 главы 6).

В этом параграфе мы проинтерпретируем каждую спинсетку $\Gamma_{j,k}$ как функцию на унитарном пространстве Шоттки

$$S_g^{\mathfrak{u}} = \mathrm{SU}(2)^g / \mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}} \mathrm{SU}(2) \ .$$

Поскольку последнее зависит лишь от рода g, но не от самого графа, это позволит нам канонически отождествлять решетки спинсеток для разных тривалентных графов одинакового рода.

Зафиксируем на произведении групп[1]

$$\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)} = \prod_{e \in E(\Gamma)} \mathrm{SU}(2)_e \tag{6.41}$$

произведение $\overrightarrow{dx}$ мер Хаара dx на SU(2), нормализованных так, что

$$\int\limits_{\mathrm{SU}(2)} dx = 1 = \int\limits_{\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}} \overrightarrow{dx} \ .$$

Любая функция $f \in L^2(\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}, \overrightarrow{dx})$ на этой группе раскладывается по формуле Петера – Вейля:

$$f(x) = \sum_{\overrightarrow{\varrho} \in \mathfrak{IR}\left(\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}\right)} \mathrm{tr}\left(B_{\overrightarrow{\varrho}, f} \circ \overrightarrow{\varrho}(x)\right) \ , \tag{6.42}$$

где

$$\mathfrak{IR}\left(\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}\right) = \{ \overrightarrow{\varrho} = \varrho_1 \otimes \varrho_2 \otimes \cdots \otimes \varrho_{3g-3} \mid \varrho_\nu \in \mathfrak{IR}\left(\mathrm{SU}(2)\right) \}$$

[1] которое фиксацией какой-либо ориентации ребер графа Γ отождествляется с пространством $\mathcal{A}$ SU(2)-связностей на Γ

есть пространство всех неприводимых представлений произведения (6.41), а

$$B_{\vec{\varrho},f} = \frac{1}{\dim V_{\vec{\varrho}}} \int\limits_{\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}} f(x) \cdot \vec{\varrho}(x^{-1})\, \overrightarrow{dx} \tag{6.43}$$

есть эндоморфизмы пространств $V_{\vec{\varrho}}$ этих неприводимых представлений[2]. Каждая спинсетка Γ_j задает представление

$$\vec{j} = \bigotimes_{e\in E(\Gamma)} j(e) \in \mathfrak{IR}\left(\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}\right) ,$$

в пространстве $V_{\vec{j}}$. В силу автодуальности представлений $\mathrm{SU}(2)$, каждый эндоморфизм этого пространства является вектором в тензорном произведении

$$\begin{aligned}\left(\bigotimes_{e\in E(\Gamma)} j_e\right) \otimes \left(\bigotimes_{e\in E(\Gamma)} j_e\right)^* &= \\ = \left(\bigotimes_{e\in E(\Gamma)} j_e\right) \otimes \left(\bigotimes_{e\in E(\Gamma)} j_e\right) &= \\ = \bigotimes_{v\in V(\Gamma)} \left(j_1(v) \otimes j_2(v) \otimes j_3(v)\right) &, \end{aligned} \tag{6.44}$$

где $\{j_1(v), j_2(v), j_3(v)\} = S(v)$ составляют звезду вершины v. Но, по определению спинсетки, каждое произведение $j_1(v) \otimes j_2(v) \otimes j_3(v)$ содержит единственный с точностью до пропорциональности сплетающий оператор i_v, так что беря их тензорное произведение, мы канонически связываем со спинсеткой оператор

$$B_{\Gamma_j} = \bigotimes_{v\in V(\Gamma)} i_v \in \mathrm{End}\left(V_{\vec{j}}\right) .$$

Таким образом, мы можем связать с любой спинсеткой функцию

$$f_{\Gamma_j}(x) = \mathrm{tr}\left(B_{\Gamma_j} \circ \vec{j}(x)\right) \in L^2(\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}, \overrightarrow{dx}) ,$$

[2] эта конструкция аналогична стандартному разложению Фурье (2.16): представление $\vec{\varrho}$ отмеряет «частоту», а эндоморфизм $B_{\vec{\varrho},f}$ играет роль «амплитуды» или *коэффициента Фурье*, вычисляющегося по формуле (6.43), тоже вполне аналогичной своей классической абелевой версии

инвариантную относительно действия калибровочной группы [3]

$$\mathrm{SU}(2)^{V(\Gamma)} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{E(\Gamma)}$$

на пространстве $\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)} \simeq \mathcal{A}$ из (6.41), и стало быть, спускающуюся на фактор

$$S_g^{\text{ц}} = \mathcal{A}/\mathcal{G} ,$$

что и требовалось.

Таким образом, множество спинсеток $\mathfrak{S}^k(\Gamma) \simeq W^k(\Gamma)$ нумерует некоторый набор специальных функций f_{Γ_j} на унитарном пространстве Шоттки[4].

Предложение 1. *Спинсетка* Γ_j *однозначно восстанавливается по графу* Γ *и функции* f_{Γ_j}.

Доказательство. Зная граф, мы восстанавливаем проекцию $\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} S_g^{\text{ц}}$ и поднимаем функцию f_{Γ_j} на $\mathcal{A} = \mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)}$. Из гармонического разложения (6.42) этой функции мы получаем представление

$$\mathrm{SU}(2)^{E(\Gamma)} \xrightarrow{j_1 \otimes j_2 \otimes \cdots \otimes j_{3g-3}} \mathrm{End}\left(V_{j_1} \otimes V_{j_2} \otimes \cdots \otimes V_{j_{3g-3}}\right)$$

и эндоморфизм $B_j \in \mathrm{End}\left(V_{j_1} \otimes V_{j_2} \otimes \cdots \otimes V_{j_{3g-3}}\right)$, разложение которого на блоки, соответствующие вершинам графа, восстанавливает весовую функцию j. $\square$

Теперь нам остается лишь построить преобразование когерентных состояний для пары $S_g^{\text{ц}} \subset S_g$ (как в § 4 главы 2), что и будет проделано нами в гл. 7.

---

[3] компоненты которой занумерованы вершинами графа Γ и выборами ориентации на его ребрах

[4] точно так же, как в конце (§ 5 главы 2) множество ϑ-характеристик $(\mathbb{Z}^g/k\mathbb{Z}^g)$ нумеровало абелевы ϑ-функциии

§ 8 MS-версия RCFT и представление Коно.

Аксиоматическое описание рациональной конформной теории поля по Муру и Зайбергу[1] (MS RCFT) включает задание алгебры слияния A (как в § 1 главы 5) и дискретного (конечного на каждом «уровне» k) множества R ее представлений ϱ_i, образующих *модулярную тензорную категорию* с выделенным элементом $\mathbf{1} \in R$, такую что $\varrho \in R \implies \varrho^* \in R$, $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$, и каждой упорядоченной тройке $\varrho_i, \varrho_j, \varrho_k$ сопоставляется конечномерное векторное пространство $V^{\varrho_i}_{\varrho_j,\varrho_k}$, так что

$$\dim V^{\mathbf{1}}_{\varrho_i,\varrho_j} = \begin{cases} 1\,, & \text{если } \varrho_i = \varrho_j^* \\ 0\,, & \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Напомним, что с любым графом рода g и валентности 3-1 мы можем связать конечномерное пространство волновых функций с отмеченным базисом, нумеруемым спинсетками. А именно, всякая спинсетка Γ_j на графе Γ задает для каждой вершины $v \in V(\Gamma)$ одномерное подпространство сплетающих операторов

$$V^{j_1}_{j_2,j_3} \in j_1 \otimes j_2 \otimes j_3\,. \tag{6.45}$$

Тензорно перемножая их по всем вершинам, а затем суммируя по всем спинсеткам, получаем пространство

$$\mathcal{H}^k_\Gamma = \bigoplus_{j \in \mathfrak{S}^k(\Gamma)} \bigotimes_{v \in V(\Gamma)} V^{j_1}_{j_2,j_3}\,, \tag{6.46}$$

в точности совпадающее с пространством (4.15) волновых функций бор-зоммерфельдова квантования.

Мы хотим фиксировать в каждом одномерном пространстве

$$\mathcal{H}^k_{\Gamma_j} = \bigotimes_{v \in V(\Gamma)} V^{j_1}_{j_2,j_3}$$

некоторый базис. Такая фиксация *a priori* не инвариантна относительно элементарных перекроек разрезания на штаны, но препятствия к инвариантности описываются 2-клетками комплекса

[1] см. [48]

графов $\mathfrak{T}_g$, и для проверки инвариантности мы должны убедиться, что произведение матриц замен базисов, возникающих при последовательных движениях по ребрам, ограничивающим каждую такую клетку, равно единице.

В рамках MS RCFT с любым графом рода g и валентности 3-1 тоже можно связать аналогичное пространство и зафиксировать в нем базис[2]. Возникающие при этом матрицы выражаются через пять элементарных матриц, которые в [48] по традиции обозначаются через F, S, T, Ω и Θ: три *фазовые матрицы* $\Omega^{\pm}$, Θ, T диагональны (в подходящем базисе) и задают изоморфизмы

$$V^{\varrho_i}_{\varrho_j,\varrho_k} \longrightarrow V^{\varrho_i}_{\varrho_j,\varrho_k}\ ,$$

S представляет *соотношение в роде 1*: $V^{\varrho_i}_{\varrho_j,\varrho_j^*} \xrightarrow{S} \sum\limits_{\ell} V^{\varrho_i}_{\varrho_\ell,\varrho_\ell^*}$. Еще есть *матрицы слияния*:

$$V^{\varrho_i}_{\varrho_j,\varrho_k} \otimes V^{\varrho_k}_{\varrho_t,\varrho_m} \xrightarrow{F} \sum_{\ell} V^{\varrho_j}_{\varrho_t,\varrho_\ell} \otimes V^{\varrho_\ell}_{\varrho_j,\varrho_m}$$

и *сплетающая матрица* $B^{\pm} = F\Omega^{\pm}F^{-1}$, удовлетворяющая стандартным условиям Редемайстера: $B_{12}B_{23}B_{12} = B_{23}B_{12}B_{23}$. Мы собираемся проверить, что соотношения между ними, аксиоматизированные в [48], выполняются и для наших спинсеток[3].

На самом деле все это матричное исчисление возникает из рассмотрения голономии уравнения Книжника - Замолодчикова

---

[2]в SU(2)-случае это можно сделать используя стнадартные $3j$-символы Вигнера, см. [46]

[3]вообще говоря, топологической (геометрической) моделью для MS RCFT является произвольное трехмерное многообразие с вложенным тривалентным графом, и переформулировка этой общей постановки на язык спинсетк аналогична пенроузовской интерпретации квантовой гравитации; геометрия спинсеток проще тем, что голономия одного ребра вокруг другого всегда тривиальна, и поэтому не возникает никаких «соотношений зацепления», тогда как в общем случае, проектируя узел на плоскость, мы должны следить за тем, какое из двух перекрывающихся ребер проходит выше; в остальном элементарные преобразования спинсеток близки к правилам разматывания для полиномов Джонса

(см. [45]). Рассмотрим параболический (валентности 3-1) граф Γ, описывающий раскрой проколотой сферы Римана

$$\Sigma = \mathbb{CP}^1 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

на штаны, и зафиксируем произвольный ортонормированный базис $\{I_1, I_2, I_3\}$ в алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ относительно стандартной формы Картана – Киллинга. Положим

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{\mu} I_\mu \otimes I_\mu \in \operatorname{End}(\mathbb{1}) = \operatorname{End}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) \\ \Omega_{ij} &= \sum_{\mu} \pi_i(I_\mu) \pi_j(I_\mu) \in \operatorname{End}(j_1 \otimes j_2 \otimes \cdots \otimes j_n), \end{aligned} \tag{6.47}$$

где $\pi_i(I_\mu)$ есть действие μ-того базисного оператора на i-ой компоненте тензорного произведения $j_1 \otimes \cdots \otimes j_n$. Далее, рассмотрим тривиальное векторное расслоение со слоем $j_1 \otimes \cdots \otimes j_n$ на конфигурационном пространстве

$$\mathbb{C}^n \setminus \Delta = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_i \neq z_j \text{ при } i \neq j\}\ .$$

Уравнение Книжника – Замолодчикова

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \frac{1}{k+2} \sum_{i \neq j} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} \Phi \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{6.48}$$

определяет на этом расслоении плоскую проективную связность

$$\omega = \frac{1}{k+2} \sum_{i<j} \Omega_{ij}\, d \log(z_i - z_j)\,,$$

относительно которой все решения (6.48) являются ковариантно постоянными (горизонтальными) сечениями. Операторный формализм двумерной конформной теории поля, введенный Цучия и Кание в [69], детально формализует все свойства монодромии этого уравнения. Мы, однако, предпочитаем ввести матрицы Мура – Зайберга более инвариантным способом.

Для начала рассмотрим гарфы Γ и Γ'_e, задающие два возможных разрезания на штаны сферы $\Sigma_{0,4}$ с 4 дырками (см. рис. 7 на стр. 109). Они имеют одно и то же множество параболических ребер

$$P(\Gamma) = P(\Gamma'_e) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \ ,$$

но оно по разному вкладывается в (упорядоченные) множества ребер этих графов, так что мы имеем два изоморфных пространства конформных блоков:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k_{\Gamma, j_1, j_2, j_3, j_4} &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}(2)}\left(j_1 \otimes j_2, j_3 \otimes j_4\right) \\ \mathcal{H}^k_{\Gamma'_e, j_1, j_2, j_3, j_4} &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}(2)}\left(j_2 \otimes j_3, j_4 \otimes j_1\right) \ , \end{aligned}$$

в которых по-разному выбран базис. Будем символически представлять эти базисы матрицами:

$$j = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad j' = \begin{pmatrix} j_3 & j_4 \\ j_2 & j_1 \end{pmatrix} \ .$$

Определение 1. Матрица

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}(2)}(j_1 \otimes j_2, j_3 \otimes j_4) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathrm{SU}(2)}(j_2 \otimes j_3, j_4 \otimes j_1) \ ,$$

переводящая первый базис во второй, называется *матрицей слияния.*

Матрица слияния задает преобразование решений уравнения Книжника – Замолодчикова. Если обозначить через

$$F_{ij} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix}$$

ее компоненты в базисе j, то они будут удовлетворять соотношениям:

$$\begin{gathered} F_{ij} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} = F_{ij} \begin{pmatrix} j_4 & j_1 \\ j_3 & j_2 \end{pmatrix} \\ \sum_j F_{ij} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} F_{jk} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 \\ j_2 & j_1 \end{pmatrix} = \delta_{ik}; \end{gathered}$$

и уравнению пятиугольника[4], возникающему на сфере с пятью дырками $\Sigma_{0,5}$.

[4]см. рис. 12 на стр. 119 и пояснения на стр. 118–121

Теперь, как и было обещано на стр. 90 в § 3 главы 4, мы можем канонически отождествить пространство (4.15) бор-зоммерфельдовых волновых функций с пространством (4.22), порожденным допустимыми целыми весами (разметками графа): в силу односвязности комплекса графов $C(\mathfrak{T})$ последовательное применение матриц слияния отождествляет между собой все пространства (6.46).

Еще одно преобразование монодромии уравнения Книжника – Замолодчикова возникает при $n = 4$ (или $n = 3 \sqcup \infty$, как в [43]).

Определение 2. Композиция преобразований:

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} j_1 & j_3 \\ j_2 & j_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} j_3 & j_2 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix}$$

называется *сплетающей матрицей.*

Как и выше, мы обозначаем коэффициенты этой матрицы через

$$B_{ij} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что сопряжение матрицей слияния диагонализует сплетающую матрицу:

$$F \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} F^{-1} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} = D,$$

где D — диагональная матрица из элементов

$$d_\nu = (-1)^{j_2+j_3-\nu} \exp\left(\pi i \left(\tfrac{\nu(\nu+1)}{k+2} - \tfrac{j_2(j_2+1)}{k+2} - \tfrac{j_3(j_3+1)}{k+2}\right)\right) .$$

Более того,

$$B_{\mu\nu} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_4-\mu-\nu} \times$$

$$\times \cdot \exp\left(-\pi i \left(\tfrac{\mu(\mu+1)}{k+2} + \tfrac{\nu(\nu+1)}{k+2} - \tfrac{j_1(j_1+1)}{k+2} - \tfrac{j_4(j_4+1)}{k+2}\right)\right) F_{\mu\nu} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 \\ j_2 & j_4 \end{pmatrix} .$$

Рассмотрим теперь «эллиптическое» элементарное преобразование тора с одной дыркой $\Gamma_{1,1}$ на рис. 7 (стр. 109), которое переставляет между собой a-цикл и b-цикл (стандартные образующие фундаментальной группы тора). Соответствующий граф имеет одну тривалентную вершину v, одно нормальное ребро — 1-петлю a и одно параболическое ребро p, отвечающее проколотой точке. Аналогично, тору с двумя дырками $\Sigma_{1,2}$ соответствует граф $\Gamma_{1,2}$ с двумя вершинами v_1, v_2, двумя нормальными ребрами a, a' и двумя параболическими ребрами p_1, p_2. Этим двум торам отвечают два пространства (6.46):

$$\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,1},j}\,,\ j\in\mathbb{Z}\,,\quad \text{и}\quad \mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,2},j_1,j_2}\,.$$

Матрицы слияния a-ребер задают отождествление

$$f\ :\ \mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,2},j_1,j_2}\xrightarrow{\ \sim\ }\bigoplus_{j\,\le\,(k-j_1-j_2)}\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,1},j}, \tag{6.49}$$

(где суммирование происходит по всем j, удовлетворяющим условиям Клебша – Гордана). В левом пространстве имеется выделенный базис $\{w_{\ell m}\}$, индексированный допустимыми весами w с $w(a)=\ell$, $w(a')=m$. Введем линейный оператор

$$\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,2},j_1,j_2}\xrightarrow{\ \mathcal{B}\ }\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,2},j_1,j_2}, \tag{6.50}$$

действие которого на этот базис выражается через сплетающие матрицы по формуле:

$$\mathcal{B}(w_{\ell m})=\sum_\mu B_{\mu\ell}\begin{pmatrix} j_1 & j_2\\ m & m\end{pmatrix}w_{\mu m}\ , \tag{6.51}$$

и определим *оператор подкрутки*, задающий действие модулярной группы $\mathfrak{M}_{1,1}$ (точнее, класса диффеоморфизма, реализующего элементарное эллиптическое преобразование[5], изображенное на рис. 7, стр. 109) на пространстве $\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,1},j}$. Для этого сопоставим

[5]этот оператор престановочен с действием диффеоморфизмов, двигающих дырку p_2 на 2-торе, соответственно, вдоль a-петли и вдоль b-петли

каждому ребру $e \in E(\Gamma)$ диагональное преобразование «весового» пространства $\mathcal{H}_\Gamma^k$ волновых функций (4.22), задаваемое в базисе $\{w\} = W_\Gamma^k$ формулой

$$T_e(w) = \exp\left(2\pi i \left(\frac{w(e)(w(e)+1)}{k+2} - \frac{k}{8(k+2)}\right)\right) \cdot w\,. \tag{6.52}$$

Определение 3. Оператором подкрутки называется эндоморфизм

$$S_k(j) \in \mathrm{End}\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,1,j}}\,,$$

удовлетворяющий трем условиям:

1) $S_k(j)^2 = (-1)^j e^{\pi i j(j+1)/(k+2)}\,\mathrm{Id}\,;$

2) $(S_k(j)T_a)^3 = S_k(j)^2\,;$

3) $S_k(j_1,j_2)\circ T_a^{-1}\circ T_{a'}\circ S_k(j_1,j_2)^{-1} = \mathcal{B}$, где

$$S_k(j_1,j_2) = f^{-1}\circ\left(\bigoplus_j S_k(j)\right)\circ f \in \mathrm{End}\left(\mathcal{H}^k_{\Gamma_{1,2,j_1,j_2}}\right)\,, \tag{6.53}$$

$\mathcal{B}$ — оператор (6.50) с матрицей (6.51), а f — изоморфизм (6.49)

(существование такой подкрутки для $k = 1,\ 2,\ 3$ проверяется элементарным прямым вычислением; для общего k это вытекает из WZW SU(2)-RCFT над тором с двумя дырками[6]).

Замечание 1. Мы видим, что для замкнутых графов (без параболических ребер) сплетающие матрицы используются только в самом последнем уравнении (6.53), причем только в специальных комбинациях (6.51). Геометрически это означает, что подкрутка (конструкция которой использует проекцию тривалентного графа на плоскость) почти не зависит от того, какое ребро при пересечении двух ребер проходит выше, а какое — ниже. Это дает повод надеяться, что вычисления подкруток в RCFT и в теории спинсеток будут совпадать и для замкнутых графов старших родов $g > 1$.

[6]см., например, [68]

Теперь мы, следуя Коно[7] и используя матрицы слияния F, диагональные операторы T_e и подкрутки S (6.51), построим проективное представление (5.10) и расслоение (6.22). Для начала рассмотрим граф «мультитэта» Θ_{g-1} рода g, представленный на рис. 14 на стр. 139 (см. также [72] и [43, fig. 12b]).

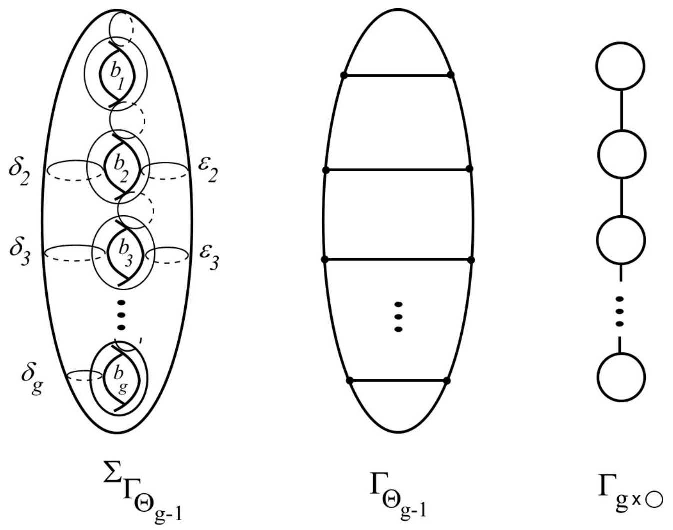

Рис. 14. Мультитэта и графы Θ_g, $\Gamma_{g\times\circ}$

Зафиксируем на римановой поверхности $\Sigma_{\Theta_{g-1}}$ набор простых окружностей

$$\{ a_1, a_2, \ldots, a_g \, , \, b_1, b_2, \ldots, b_g \, , \, \delta_2, \, \ldots \, , \, \delta_g \, , \, \varepsilon_2, \, \ldots \, , \, \varepsilon_{g-1} \} \, . \tag{6.54}$$

Раскрой этой поверхности на штаны, кодируемый графом Θ_{g-1}, задается поднабором окружностей

$$\{ a_1, a_2, \ldots, a_g \, , \, \delta_2, \, \ldots \, , \, \delta_g \, , \, \varepsilon_2, \, \ldots \, , \, \varepsilon_{g-1} \} \, , \tag{6.55}$$

которые мы отождествляем с соответствующими ребрами и строим по ним набор диагональных операторов (6.52)

$$\{ \, T_{a_1}, T_{a_2}, \ldots, T_{a_g} \, , \, T_{\delta_2}, \, \ldots \, , \, T_{\delta_g} \, , \, T_{\varepsilon_2}, \, \ldots \, , \, T_{\varepsilon_{g-1}} \}$$

[7]см. [43]

на пространстве $\mathcal{H}^k_{\Theta_{g-1}}$. Эти операторы представляют *скручивания Дена* вдоль всех окружностей (6.55), но они пока не порождают всю модулярную группу $\mathfrak{M}_g$: еще остаются скручивания Дена вдоль петель b_i, для представления которых нам придется несколько упростить наш граф.

Рассмотрим граф $\Gamma_{g\times\mathrm{O}}$, изображенный на рис. 14 и представляющий собою цепочку из g окружностей $C_1, C_2, \ldots, C_g$, последовательно соединенных $(g-1)$ ребрами $B_1, B_2, \ldots, B_{g-1}$ так, что B_i связывает C_i с C_{i+1}. Средние окружности $C_2, \ldots, C_{g-1}$ содержат по два ребра $C_i = C_i' \cup C_i''$, и

$$E(\Gamma_{g\times\mathrm{O}}) = C_1, C_g, C_2', \ldots, C_{g-1}', C_2'', \ldots, C_{g-1}'', B_1, \ldots, B_{g-1} \ .$$

Разрезая соответствующую риманову поверхность $\Sigma_{\Gamma_{g\times\mathrm{O}}}$ по $(g-1)$ окружностям B_i, мы получим два тора с дыркой $\Sigma^1_{1,1}$, $\Sigma^g_{1,1}$ и $(g-2)$ торов $\Sigma^i_{1,2}$ (где $2 \le i \le g-1$) с двумя дырками, при этом b-кривые b_1 и b_g из исходного набора (6.54) оказываются, соответственно, на первом и на втором торе с одной дыркой:

$$b_1 \subset \Sigma^1_{1,1} \ , \quad b_g \subset \Sigma^g_{1,1}, ,$$

а остальные b-кривые попадают на дважды проколотые торы:

$$b_i \subset \Sigma^i_{1,2} \quad \text{при } 2 \le i \le g-1 \ .$$

Отождествляя пространство $\mathcal{H}^k_{\Theta_{g-1}}$ с пространством $\mathcal{H}^k_{\Gamma_{g\times\mathrm{O}}}$, в котором фиксирован базис, индексированный спинсетками уровня k на $\Gamma_{g\times\mathrm{O}}$, мы получаем следующие представления для скручиваний Дена вдоль b_i (действующих на паре торов с одной и с двумя дырками, как на стр. 137):

$$\begin{gathered}
T_{A_1} \circ S_k(j(B_1)) \circ T_{A_1} \\
T_{A_2''} \circ S_k(j(B_1), j(B_2)) \circ T_{A_2''} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_{A_{g-1}''} \circ S_k(j(B_{g-2}), j(B_{g-1})) \circ T_{A_{g-1}''} \\
T_{A_g} \circ S_k(j(B_{g-1})) \circ T_{A_g}
\end{gathered} \tag{6.56}$$

Используя представление модулярной группы образующими и соотношениями (см. [79]), проверяем, что построенные нами операторы задают нужное нам проективное представление (см. [43]). В результате мы получаем два «почти линейных» проективных представления (5.10), возникающих из двух версий рациональной конформной теории поля: из модели Весса – Зумино – Виттена (связность (5.8) из § 2 главы 5) и из аксиоматики Мура – Зайберга. Слои соответствующих плоских векторных расслоений являются пространствами волновых функций для двух различных типов поляризаций: комплексной и вещественной. В работе [43] Коно рассматривает собственную версию конформной теории поля, основанную на комбинаторном описании пространства конформных блоков. В конце этой книги мы обсудим, как напрямую отождествить все эти теории.

Глава 7.
АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ НЕАБЕЛЕВЫХ ϑ-ФУНКЦИЙ

§ 1 Унитарное пространство Шоттки.

Материал этой главы полностью параллелен § 4 главы 2 и основывается на препринте [27].

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_\Gamma^k$ из формулы (6.2). Его базис занумерован множеством спинсеток или соответствующих им[1] функций на унитарном пространстве Шоттки $S_g^{\mathfrak{u}}$. Поскольку многообразие

$$S_g^{\mathfrak{u}} = \mathrm{SU}(2)^g/\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}\mathrm{SU}(2)$$

особо, нам придется интерпретировать все геометрические объекты на нем как $\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SU}(2))$-инвариантные объекты на прямом произведении $\mathrm{SU}(2)^g$.

Комплексификацией компактной вещественной группы $\mathrm{SU}(2)$ является комплексная группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. У этих двух групп одинаковая теория конечномерных представлений:

$$\mathfrak{IR}\,(\mathrm{SU}(2)) = \mathfrak{IR}\,(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) = \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}\,.$$

Как и выше, мы будем обозначать эти неприводимые представления символами $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а пространства, в которых они происходят, — буквами V_j, так что $\dim V_j = (2j+1)$. Отметим, что

[1]см. предл. 1 из § 7 главы 6 на стр. 131

действие $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на V_j, конечно же, не сохраняет эрмитову структуру, но условие существования сплетающих операторов в тензорных произведениях и сами эти операторы будут теми же, что и для $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

§ 2 g-расширение конструкции Холла для SU(2).

Прежде всего, для удобства читателя и фиксации необходимых обозначений, напомним вкратце, что Б. Холл в [36], используя ядро ϱ_t уравнения теплопроводности с лапласианом Δ, индуцированным нормированной двусторонне инвариантной метрикой dx на $\mathrm{SU}(2)$, построил *преобразование когерентных состояний*:

$$L^2(\mathrm{SU}(2), dx) \xrightarrow{\mathrm{CST}_t} \mathcal{H}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \cap L^2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), dz) \tag{7.1}$$

вещественных функций на $\mathrm{SU}(2)$ в голоморфные функции на комплексной группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. А именно, ядро теплопроводности ϱ_t допускает единственное аналитическое продолжение на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (которое мы также будем обозначать ϱ_t), и функция

$$f \in L^2(\mathrm{SU}(2), dx)$$

переводится отображением (7.1) в голоморфную функцию, значение которой на элементе $z \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ равно $\mathrm{SU}(2)$-усреднению когерентных состояний:

$$\mathrm{CST}_t f(z) = \int\limits_{\mathrm{SU}(2)} f(x)\varrho_t(x^{-1}z)\,dx = \mathcal{C}\left(\varrho_t \star f\right)(z) = \mathcal{C}\left(e^{t\frac{\Delta}{2}} f\right)(z), \tag{7.2}$$

(где $\star$ обозначает свертку на $\mathrm{SU}(2)$, а $\mathcal{C}$ — аналитическое продолжение с $\mathrm{SU}(2)$ на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$). Преобразованная функция представляет собой решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\Delta u$$

с начальным условием $u(0,x) = f(x)$, и если $f \in L^2(\mathrm{SU}(2), dx)$ имела разложение Петера – Вейля:

$$f(x) = \sum_{j \in \Im\Re(\mathrm{SU}(2))} \mathrm{tr}(j(x) B_{j,f}) \ ,$$

где сумма берется по всем классам эквивалентных неприводимых представлений и

$$B_{j,f} = \frac{1}{\dim V_j} \int\limits_{\mathrm{SU}(2)} f(x) \cdot j(x^{-1}) \, dx \in \mathrm{End}(V_j) \ , \tag{7.3}$$

то $\mathrm{CST}_t f(z) = \sum\limits_{j \in \Im\Re(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))} e^{-t\lambda_j/2} \mathrm{tr}(j(z) B_{j,f})$, где λ_j есть собственные значения оператора $-\Delta$ на функциях $\mathrm{tr}(B_j(x))$.

Оказывается, что продолжая преобразование CST_t на подходящий класс обобщенных функций на $\mathrm{SU}(2)$ (как в § 4 главы 2), мы можем получить голоморфные функции на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, являющиеся голоморфными сечениями линейных расслоений. Более того, эта конструкция дословно переносится на произведения

$$\mathrm{SU}(2)^g \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^g$$

и даже может быть спущена на компактифицированные факторы

$$S_g^{\mathfrak{u}} = \mathrm{SU}(2)^g / \mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SU}(2)) \ \subset \ S_g = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^g / \mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \ ,$$

но этот последний шаг потребует введения некоторых дополнительных параметров, с точного описания которых мы и начнем.

Зафиксируем комплексную симметрическую $g \times g$ - матрицу с положительной мнимой частью[1] $\Omega = (\Omega_{\alpha\beta}) = \mathrm{Re}\,\Omega + i\,\mathrm{Im}\Omega$ и рассмотрим на $S_g^{\mathfrak{u}}$ инвариантный лапласиан

$$\Delta^{(\mathrm{Im}\Omega)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{g} \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Im}\Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

[1] т. е. точку зигелева полупространства H_g

(где $\partial/\partial x_\alpha$, $\partial/\partial x_\beta$ есть инвариантные векторные поля на SU(2)). Обозначим через $\mu_t^{(\mathrm{Im}\Omega)}$ фундаментальное решение комплексного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\,\Delta_{\mathbb{C}}^{(\mathrm{Im}\Omega)}\,u = \sum_{\alpha,\beta=1}^{g} \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Im}\Omega_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\right) u\ ,$$

а через $d\nu_t^{(\mathrm{Im}\Omega)}$ — усреднение гауссовой меры[2] $\mu_t^{(\mathrm{Im}\Omega)}\,dw$ на S_g по левому действию S_g^{u}. При всех вещественных $t > 0$ мы имеем унитарное преобразование Холла:

$$L^2(S_g^{\mathrm{u}}, dx) \xrightarrow{\mathrm{CST}_t^{(\mathrm{Im}\Omega)}} \mathcal{H}(S_g) \cap L^2(S_g, d\nu_t^{(\mathrm{Im}\Omega)})$$
$$f \longmapsto \mathrm{CST}_t^{(\mathrm{Im}\Omega)} f(w) = \mathcal{C}\left(e^{\frac{t}{2}\Delta^{(\mathrm{Im}\Omega)}} f\right)(w)$$

и нетрудно видеть, что добавление к лапласиану мнимой части, т. е. замена его несамосопряженным лапласианом на S_g^{u}:

$$\Delta^{(-i\Omega)} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{g} \frac{i}{2\pi}\,\Omega_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

не нарушает унитарности этого преобразования:

Предложение 1. *Преобразование* $\mathrm{CST}_t^{(-i\Omega)} = \mathcal{C} \circ e^{\frac{t}{2}\Delta^{-i(\Omega)}}$:

$$L^2(S_g^{\mathrm{u}}, dx) \longrightarrow \mathcal{H}(S_g) \cap L^2(S_g, (d\nu_t^{(\mathrm{Im}\Omega)})) \tag{7.4}$$

унитарно для любых матрицы $\Omega \in H_g$ *и вещественного* $t > 0$.

Доказательство. Это преобразование раскладывается в композицию: $\mathrm{CST}_t^{(-i\Omega)} = \mathcal{C} \circ e^{\frac{t}{2}\Delta^{(\mathrm{Im}\Omega)}}$
$circe^{\frac{t}{2}\Delta^{(-i\mathrm{Re}\,\Omega)}}$, в которой унитарность оператора $\mathcal{C} \circ e^{\frac{t}{2}\Delta^{(\mathrm{Im}\Omega)}}$ хорошо известна, а

$$e^{\frac{t}{2}\Delta^{(-i\mathrm{Re}\,\Omega)}} = e^{-i\frac{t}{2}\Delta^{(\mathrm{Re}\,\Omega)}}$$

унитарен при $t \in \mathbb{R}$, поскольку $\Delta^{(\mathrm{Re}\,\Omega)}$ самосопряжен. □

[2]здесь $dw \equiv dxdy$ — индуцированная нормализованной мерой Хаара стандартная мера на $S_g = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^g/\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$

Если поднять функцию $f \in L^2(S_g^{\text{u}}, d\overrightarrow{x})$ до $\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SU}(2))$-инвариантной функции на $\mathrm{SU}(2)^g$ и разложить ее в ряд Петера – Вейля:

$$f(x) = \sum_{\overrightarrow{j} \in \mathfrak{IR}(\mathrm{SU}(2)^g)} \mathrm{tr}\left(\overrightarrow{j}(\overrightarrow{x}) B_{\overrightarrow{j},f}\right),$$

(где суммирование происходит по всем классам эквивалентных неприводимых представлений[3] $\mathrm{SU}(2)^g$, а коэффициенты Фурье

$$B_{\overrightarrow{j},f} \in \mathrm{End}\ V_{\overrightarrow{j}}$$

вычисляются по привычной формуле), то ее образ при преобразовании (7.4) будет задаваться формулой

$$\mathrm{CST}_t^{(-i\Omega)} f(\overrightarrow{z}) = \sum_{\overrightarrow{j} \in \mathfrak{IR}(\mathrm{SU}(2)^g)} e^{-t\lambda_{\overrightarrow{j}}^{(-i\Omega)}/2}\, \mathrm{tr}\left(\overrightarrow{j}(z) B_{\overrightarrow{j},f})\right),$$

где $\lambda_{\overrightarrow{j}}^{(-i\Omega)}$ есть собственное значение оператора $-\Delta^{(-i\Omega)}$ на функциях вида $\mathrm{tr}(B_{\overrightarrow{j}}(\overrightarrow{z}))$, а $B_{\overrightarrow{j}} \in \mathrm{End}(V_{\overrightarrow{j}})$ представляют собой в точности те же $\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$-эквивариантные эндоморфизмы ровно тех же пространств, что и для $\mathrm{SU}(2)$-случая). Таким образом, голоморфная функция $\mathrm{CST}_t^{(-i\Omega)} f(z)$ тоже $\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$-инвариантна, т. е. спускается на S_g, доставляя аналитическое продолжение на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^g$ имеющегося на $\mathrm{SU}(2)^g$ решения комплексного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta^{(-i\Omega)} u$$

с начальным условием f на S_g^{u}. И это расширенное преобразование когерентных состояний продолжается на пространство обобщенных функций[4] $(C^\infty(S_g^{\text{u}}))'$:

---

[3] которые исчерпываются тензорными произведениями $\overrightarrow{j} = j_1 \otimes j_2 \otimes \cdots \otimes j_g$ с $j_\nu \in \mathfrak{IR}(\mathrm{SU}(2))$

[4] напомним, что унитарное пространство Шоттки S_g^{u} компактно

Предложение 2. *Для любых $\Omega \in H_g$ и вещественного $t > 0$ преобразование обобщенных функций, задаваемое в терминах разложения Петера – Вейля формулой*

$$\sum_{\vec{j}\in\Im\Re(\mathrm{SU}(2)^g)} \mathrm{tr}(\vec{j}(\vec{x})B_{\vec{j},f}) \longmapsto \sum_{\vec{j}\in\Im\Re(\mathrm{SU}(2)^g)} e^{-t\lambda^{(-i\Omega)}_{\vec{j}}/2}\,\mathrm{tr}(\vec{j}(z)B_{\vec{j},f})\ , \qquad (7.5)$$

является корректно определенным линейным отображением

$$(C^\infty(S^{\text{ц}}_g))' \xrightarrow{\mathrm{CST}^{(-i\Omega)}_t} \mathcal{H}((\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))^g)\ .$$

Доказательство. Действие оператора Лапласа и его степеней на обобщенные функции двойственно их действию на $C^\infty(S^{\text{ц}}_g)$. По определению, $f \sum_{\vec{j}\in\Im\Re(\mathrm{SU}(2)^g)} \mathrm{tr}\Big(\vec{j}(\vec{x})B_{\vec{j},f}\Big) \in (C^\infty(S^{\text{ц}}_g)'$, если $||B_{\vec{j},f}|| < C_1\, e^{||\vec{j}||}$ для некоторой константы $C_1 > 0$ (где норма

$$||(j_1,j_2,\dots,j_g)||^2 = \sum_{\nu=1}^{g}(2j_\nu+1)^2$$

для $\vec{j} \in \Im\Re\,(\mathrm{SU}(2)^g)$). Ну а голоморфность $\mathrm{CST}^{(-i\Omega)}_t f$ означает существование константы $C_2 > 0$, такой что

$$|e^{-t\lambda^{(-i\Omega)}_{\vec{j}}/2}|\cdot||B_{\vec{j},f}|| < e^{C_2||\vec{j}||^2} \quad \forall\, \vec{j} \in\Im\Re\,(\mathrm{SU}(2)^g)\ \text{с}\ ||\vec{j}|| \gg 0\ .$$

Но такое C_2 существует, поскольку $\mathrm{Im}\Omega > 0$. □

Искомые нами неабелевы ϑ-функции на S_g получаются применением преобразования (7.5) из предыдущего предложения к подходящим линейным комбинациям δ-функций на $S^{\text{ц}}_g$. А именно, применяя преобразование (7.5)при [5] $t = 1/k$ к δ-функции

$$\vartheta^{S^{\text{ц}}_g}_k(x) = \sum_{\vec{j}\in\Im\Re(\mathrm{SU}(2)^g)} \mathrm{tr}\left(\vec{j}(\vec{x})\right)$$

[5]как и в § 4 главы 2, мы придаем временному параметру уравнения теплопроводности дискретное положительное значение $t = 1/k$

с носителем в единице, для которой $B_{\overrightarrow{j},f} = \mathrm{Id}$, получим голоморфную функцию

$$\mathrm{CST}^{(-i\Omega)}_{1/k}(\vartheta^{S^{\text{ц}}_g}_k) = \sum_{\overrightarrow{j} \in \mathfrak{IR}(\mathrm{SU}(2)^g)} e^{-tk\lambda^{(-i\Omega)}_{\overrightarrow{j}}/2} \mathrm{tr}\left(\overrightarrow{j}(z)\right) .$$

Ну а для произвольной спинсетки $\Gamma_j \in \mathfrak{S}^k_\Gamma$ уровня k нам следует применить $\mathrm{CST}^{(-i\Omega)}_{1/k}$ к обобщенной функции

$$\vartheta^{\Gamma_j}(x) = \sum_{\overrightarrow{j} \in \mathfrak{IR}(\mathrm{SU}(2)^g)} f_{\Gamma_j} \mathrm{tr}\left(\overrightarrow{j}(\overrightarrow{x})\right) ,$$

что даст аналитическую функцию $C^{(-i\Omega)}_{1/k}(\vartheta^{\Gamma_j})$ на S_g.

Получаемый таким способом набор голоморфных функций

$$\left\{C^{(-i\Omega)}_{1/k}\left(\vartheta^{\Gamma_j}\right)\right\} \tag{7.6}$$

на комплексном пространстве Шоттки и является искомым неабелевым обобщением ϑ-функциий с характеристиками. Подчеркнем, что он строится по матрице периодов *произвольного* абелева многообразия и индексируется спинсетками $\Gamma_j \in \mathfrak{S}^k_\Gamma$ на графе Γ.

Глава 8. ОТОБРАЖЕНИЕ БОРТВИКА – ПОЛА – УРИБЕ

§ 1 Геометрия лагранжевых циклов.

В случае, когда ранги пространств волновых функций, получаемых в результате келерова и бор-зоммерфельдова квантований совпадают (т. е. когда квантование численно полно в смысле § 6 главы 1), возникает вопрос о наличии *естественного* изоморфизма между этими пространствами. Иначе говоря, можем ли мы канонически сопоставить ковариантно постоянным сечениям ограничений линейного расслоения предквантования на бор-зоммерфельдовы циклы глобальные голоморфные сечения этого линейного расслоения над всем многообразием?

Примером такого естественного отождествления пространств волновых функций является хорошо известное преобразование когерентных состояний Сигала – Баргмана, впервые возникшее в квантовой механике как преобразование вещественных интегрируемых с квадратом функций на конфигурационном пространстве в голоморфные функции на фазовом пространстве. В простейшем случае конфигурационным пространством является вещественное пространство $\mathbb{R}^g$, рассматриваемое как вещественная часть комплексного фазового пространства $\mathbb{C}^g$. Однако, эта конструкция может быть значительно обобщена.

Так, в классической теории абелевых ϑ-функциий (см. § 4 главы 2) мы заменили $\mathbb{R}^n$ на вещественный тор T^n (нулевое сечение

T^g_- вещественной поляризации (2.6), являющееся специальным лагранжевым подтором исходного комплексного тора A), а $\mathbb{C}^n$ — на комплексный тор $(\mathbb{C}^*)^n$.

Далее, в § 2 главы 7, мы заменили $\mathbb{R}^n$ на компактную группу Ли SU(2), а $\mathbb{C}^n$ — на ее комплексификацию[1] $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, а затем заменили $\mathbb{R}^n$ на унитарное пространство Шоттки

$$S_g^{\mathrm{u}} = \mathrm{SU}(2)^g/\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SU}(2)) \ ,$$

а $\mathbb{C}^n$ — на комплексное пространство Шоттки

$$S_g = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^g/\mathrm{Ad}_{\mathrm{diag}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) \ .$$

Но наиболее изящным с аналитической точки зрения[2] обобщением преобразования Сигала – Баргмана является отображение Бортвика – Пола – Урибе[3], в конструкции которого $\mathbb{C}^n$ заменяется любым компактным келеровым многообразием, а $\mathbb{R}^n$ — произвольным бор-зоммерфельдовым лагранжевым циклом[4]. Это отображение доставляет мощнейший инструмент для сравнения результатов бор-зоммерфельдова и келерова квантований и тесно связано с классическим методом WKB, только действует в противоположном направлении: WKB-аппроксимация сопоставляет волновой функции некоторый лагранжев цикл в фазовом пространстве с полуплотностью на нем, в то время как BPU-отображение переводит бор-зоммерфельдов цикл с полуплотностью на нем в некоторую волновую функцию, определенную с точностью до фазового множителя из $U(1)$.

Сравнение комплексной и симплектической геометрий[5] мы начнем с рассмотрения поляризованного келерова многообразия

$$(M_I, \omega, L, \nabla) \ ,$$

[1] что, как мы уже отмечали, является частным случаем общей конструкции Б. Холла, применимой к произвольным вещественным группам Ли «компактного типа»: см. [36]

[2] интегральные операторы Фурье, лежандровы распределения и т. п.

[3] см. [1]2

[4] точнее, лежандровым циклом, ограничивающим комплексную псевдовыпуклую область

[5] детали всех конструкций см. в [29]

такого что форма кривизны $F_\nabla = 2\pi i\,\omega$. Под лагранжевым циклом на M_I мы понимаем класс невырожденных[6] дифференцируемых отображений в M

$$S \xrightarrow{\varphi} M_I \ : \quad \varphi^*\omega = 0 \tag{8.1}$$

фиксированного гладкого компактного ориентированного вещественного многообразия S размерности

$$\dim_{\mathbb{R}} S = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M_I$$

по модулю естественного действия группы Diff^+ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S.

Крайне важно, что ни один такой цикл не может лежать ни в каком собственном алгебраическом подмногообразии (в частности, на дивизоре), и поэтому голоморфные объекты однозначно определяются тем, как они ограничиваются на такие циклы (например, мы можем ограничивать на S голоморфное сечение линейного расслоения, кривизна которого пропорциональна ω).

Замечание 1. С геометрической точки зрения, лагранжевы циклы имеют наименьшую возможную размерность среди всех потенциальных носителей граничных условий для голоморфных объектов. Однако традиционно граничные условия УрЧП принято задавать на подмногообразиях вещественной коразмерности 1. Такой традиционный подход совпадает с лагранжевым только на римановых поверхностях, и именно в этом кроется причина того, что современная теория интегрируемых систем сводит множество аналитических проблем к алгебраической геометрии кривых при помощи ограничений голоморфных объектов на малые окружности[7]. Похоже на то, что естественное обобщение современной теории интегрируемых систем на старшие размерности должно идти по пути ограничения голоморфных объектов именно на лагранжевы подмногообразия.

Лагранжево вложение (8.1) многообразия S в симплектическое многообразие M не имеет никаких локальных инвариантов. Тем не менее, имеются два стандартных способа их различить: рассматривать инварианты семейств лагранжевых подмногообразий

[6] т. е. таких что $\ker(d\varphi_p) = 0$ хотя бы в одной точке

[7] см., например, обзор [21]

(скажем, предельные особые циклы) и снабжать лагранжевы подмногообразия дополнительными геометрическими структурами (допустим, фиксировать над ними сечения какого-либо глобального расслоения или связность на тривиальном линейном расслоении). Примером такого рода дополнительной структуры является ограничение на лагранжев цикл S данных геометрического предквантования (L, ∇) на M.

Поскольку $F_{\varphi^*\nabla} = 2\pi i\,\varphi^*\omega = 0$, ограничение φ^*L расслоения предквантования L на лагранжев цикл (8.1) является топологически тривиальным линейным расслоением с плоской эрмитовой связностью $\varphi^*\nabla$, калибровочный класс которой однозначно определяется характером ее монодромии $\pi_1(S) \xrightarrow{\chi} U(1)$. Расслоение φ^*L тогда и только тогда имеет глобальное ковариантно постоянное унитарное сечение над S, когда этот характер тривиален. Таким образом, пространство ковариантно постоянных сечений $H^0_\nabla(\varphi^*L, S)$ или нульмерно, или одномерно. Лагранжев цикл S называется *бор-зоммерфельдовым* уровня k, если $\chi^k = 1$, т. е. характер монодромии на φ^*L^k тривиален (см. § 2 главы 1).

Фиксация ковариантно постоянного унитарного сечения (т. е. горизонтальной тривиализации) расслоения φ^*L отождествляет гладкие (C^∞) сечения ограничения L на S с гладкими комплекснозначными функциями на S:

$$\Gamma^\infty(L^k|_S) = C^\infty_{\mathbb{C}}(S)\ .$$

Таким образом, ограничивая глобальные голоморфные сечения L на бор-зоммерфельдов цикл S, получаем *вложение*:

$$H^0(M_I, L^k) \xhookrightarrow{\mathrm{res}} C^\infty_{\mathbb{C}}(S)\ ,$$

которое при выборе другой унитарной горизонтальной тривиализации умножится на константу из $U(1)$.

Определение 1. Образ $\mathcal{H}_S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{res}(H^0(M_I, L^k)) \subset C^\infty_{\mathbb{C}}(S)$ называется *аналогом пространства Харди* уровня k.

Определение 2. Пара $(S, \sqrt{\mu})$, которая состоит из лагранжева цикла (8.1) и полуформы[8] $\sqrt{\mu}$ на нем, называется *полувзвешенным* лагранжевым циклом.

Фиксация полуформы[9] $\sqrt{\mu}$ на S позволяет отождествить с пространством гладких функций $C^\infty_{\mathbb{C}}(S)$ также и пространство полуформ $\Gamma^\infty(\Delta^{1/2})$. В результате получаем отождествление

$$\Gamma^\infty(L^k|_S) \cdot \sqrt{\mu} = \Gamma^\infty(\Delta^{1/2}) \ .$$

Отметим, что на этом пространстве имеется естественная эрмитова форма, задаваемая интегрированием по S произведения двух полуформ.

§ 2 Лежандровы распределения.

Д. Бортвик, Т. Пол и А. Урибе в замечательной работе [12], используя обычные краевые условия в коразмерности 1 и настоящее пространство Харди строго псевдовыпуклой области, построили обобщенную функцию из $(C^\infty(S) \cdot \sqrt{\mu})'$, ограничение которой на $\mathcal{H}^k_I$ определяет ковектор или *состояние*[1] из $H^0(L^k, M_I)^*$. Ниже мы приводим набросок этой конструкции, отсылая читателя за подробностями к оригинальной работе [12] или к [29], где (с привлечением результатов Дж. Ронсли) дается ее алгебро-геометрическая версия.

Поскольку расслоение L положительно, главное $U(1)$-расслоение

$$P \xrightarrow{p} M \ ,$$

[8] т. е. глобального ненулевого сечения $\sqrt{\mu} \in \Gamma^\infty(\Delta^{1/2})$ квадратного корня из комплексного детерминантного расслоения Δ на S

[9] есть несколько способов согласованно снабдить все лагранжевы подмногообразия полуформами; например, если фиксировать на келеровом многообразии M метаплектическую структуру, то она индуцирует металинейную структуру на каждом лагранжевом подмногообразии S, что позволяет построить полуформу $\sqrt{\mu}_g$ на S по келеровой метрике g на M (см. [31]); другой пример: на графике любого метасимплектоморфизма имеется полуформа, квадрат которой равен симплектической форме объема

[1] см. § 3 главы 1

ассоциированное с L^* (т. е. расслоение единичных окружностей $P \subset L^*$), является границей строго псевдовыпуклой области $D_I \subset L^*$ — расслоения единичных дисков в L^*, комплексная структура на котором канонически индуцируется комплексной структурой I на келеровом многообразии M. Следовательно, существует ортогональный $U(1)$-эквивариантный проектор — так называемый *проектор Сеге*:

$$L^2(P) \xrightarrow{\Pi_I} \mathcal{H} \tag{8.2}$$

на *пространство Харди*, которое состоит из всех L^2-функций на $P = \partial D$, являющихся ограничениями голоморфных функций с D_I. При этом легко углядеть, что весовое разложение пространства Харди по действию $U(1)$ имеет вид

$$\mathcal{H}_I = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}_I^k, \quad \text{где } \mathcal{H}_I^k \simeq H^0(M_I, L^k) \ , \tag{8.3}$$

в частности, $\Pi_I = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Pi_k$.

Эрмитова связность на L^*, индуцируемая связностью предквантования на L, представляется чисто мнимой $U(1)$-инвариантной 1-формой[2] α на P, которая определяет на P контактную структуру с формой объема

$$\frac{1}{2\pi}\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} = \alpha \wedge p^*\omega^{\wedge n} \ .$$

Каждый бор-зоммерфельдов цикл $(S, \sqrt{\mu})$ однозначно с точностью до действия $U(1)$ поднимается[3] до полувзвешенного лежандрова цикла

$$(\Lambda, \sqrt{\mu}) \subset P. \tag{8.4}$$

А если фиксировать на M подходящую метаплектическую структуру, то на каждом бор-зоммерфельдовом цикле $S \subset M$ канонически индуцируется полуформа $\sqrt{\mu}$, которую можно поднять до полуформы на лежандровом цикле $\Lambda \subset P$, лежащем над S.

[2]ее ядра являются горизонтальными гиперплоскостями нашей связности

[3]такой подъем означает фиксацию ковариантно постоянного унитарного сечения $L^*|_S$, комплексно сопряженного какому-нибудь ковариантно постоянному унитарному сечению $L|_S$

Проекция Сеге продолжается[4] на пространство обобщенных функций, содержащее конормальные распределения порядка $m+n$ к лежандровым циклам (напомним, что $\dim_{\mathbb{R}} M_I = 2n$). Таким образом, с каждым $\Lambda \subset P$ ассоциируется некоторое пространство лежандровых распределений порядка m, символы которых выглядят как дельта функции или их производные и могут быть отождествлены[5] с полуформами на Λ. В частности, с полувзвешенным лежандровым циклом $(\Lambda, \sqrt{\mu})$ можно связать выделенное лежандрово распределение порядка $1/2$ с символом $\sqrt{\mu}$ и проекцию Сеге δ-функции δ_Λ. Таким образом, с каждым лежандровым подъемом $(\Lambda, \sqrt{\mu}) \subset P$ полувзвешенного бор-зоммерфельдова цикла $(S, \sqrt{\mu}) \subset M$ мы связываем набор векторов

$$\mathrm{BPU}_k(\Lambda, \sqrt{\mu}) = \Pi^k_{\sqrt{\mu}}(\delta_\Lambda) \in H^0(M_I, L^k) \ , \tag{8.5}$$

где $\Pi^k_{\sqrt{\mu}}$ — (продолженная) проекция Сеге на k-ую компоненту (расширенного) пространства Харди (8.3) обобщенных функций с символом $\sqrt{\mu}$. Но поскольку лежандров подъем определен лишь с точностью до умножения на элементы из $U(1)$, каждый полувзвешенный бор-зоммерфельдов цикл $(S, \sqrt{\mu})$ однозначно задает лишь точку на проективизации, т. е. состояние:

$$\mathrm{BPU}_k(S, \sqrt{\mu}) = \mathbb{P}\left(\Pi^k_{\sqrt{\mu}}(\delta_\Lambda)\right) \in \mathbb{P}\left(H^0(M_I, L^k)\right) \ .$$

Квадрат полуформы $\mu = \left(\sqrt{\mu}\right)^2$ задает на полувзвешенном цикле $(S, \sqrt{\mu})$ форму объема. Мы обозначаем через

$$\mathrm{BS}^v_k = \left\{ \ (S, \sqrt{\mu}) \in \mathrm{BS}_k \ \middle| \ \int_S \mu = v \ \right\}$$

пространство полувзвешенных бор-зоммерфельдовых циклов объема v. На самом деле это пространство является бесконечномерным *комплексным келеровым многообразием*, и BPU-конструкция задает его «рациональное отображение»[6]

$$\mathrm{BS}^v_k \xrightarrow{\mathbb{P}\varphi_k} \mathbb{P}\left(H^0(M_I, L^k)^*\right) \ , \tag{8.6}$$

[4] см. [12, 2.1]
[5] см. [12, 2.2]
[6] см. [74], [29]

дифференциал которого двойственен мономорфизму ограничения голоморфных сечений на лагранжев цикл.

Имеется также аналог «теорем A и B» Ж.-П. Серра[7]:

Теорема 1. *При* $k \gg 0$ *образ* $\mathrm{BPU}_k(\Lambda, \sqrt{\mu}) \neq 0$ *для любого полувзвешенного бор-зоммерфельдова цикла* $(S, \sqrt{\mu})$.

Наконец, всякий бор-зоммерфельдов цикл S однозначно восстанавливается как *квазиклассический предел*[8] (т. е. при $k \to \infty$) своих BPU_k-образов: волновые фронты BPU-распределений концентрируются[9] на $S \subset M_I$. Более того, асимптотическое поведение скалярного произведения BPU-образов двух полувзвешенных бор-зоммерфельдовых циклов $(S_1, \sqrt{\mu}_1)$ и $(S_2, \sqrt{\mu}_2)$

$$\big\langle \mathrm{BPU}_k(S_1, \sqrt{\mu}_1),\, \mathrm{BPU}_k(S_2, \sqrt{\mu}_2) \big\rangle$$

(относительно канонической эрмитовой структуры (1.9) на пространстве сечений $H^0(M_I, L^k)$:

$$\langle s_1,\, s_2\rangle = \int\limits_M (s_1, s_2)_L \cdot \omega^{\wedge n}\ ,$$

индуцированной послойным скалярным произведением $(s_1, s_2)_L$ в эрмитовой структуре на L) вычисляется в терминах пересечения $S_1 \cap S_2$ благодаря наличию асимптотики:

$$\langle \mathrm{BPU}_k(S_1, \sqrt{\mu}),\, \mathrm{BPU}_k(S_2, \sqrt{\mu})\rangle \sim \left(\frac{k}{\pi}\right)^n \int\limits_S \mu + O(k^{n-1})\ . \qquad (8.7)$$

В частности, если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то их BPU_k-образы асимптотически ортогональны:

$$\big\langle \mathrm{BPU}_k(S_1, \sqrt{\mu}_1),\, \mathrm{BPU}_k(S_2, \sqrt{\mu}_2) \big\rangle \sim \left(\frac{k}{\pi}\right)^{n-1} + O(k^{n-2})\ . \qquad (8.8)$$

[7] см. [12, chap. 3]

[8] напомним, что $h = 1/k$ играет роль *постоянной Планка* в асимптотическом анализе квантовых состояний при физической интерпретации квазиклассического геометрического квантования

[9] см. [12] и имеющиеся там дальнейшие ссылки

Вместе с предыдущим описанием дифференциала BPU-отображения (8.6) это дает

Предложение 1. *На любом наборе трансверсальных бор-зоммерфельдовых слоев произвольной вещественной поляризации*

$$M_I \xrightarrow{\pi} B$$

всегда можно задать полуформы так, чтобы BPU$_k$*-образы соответствующих полувзвешенных циклов были линейно независимы в* $H^0(M_I, L^k)$ *при* $k \gg 0$.

А более внимательный анализ асимптотик квантовых состояний позволяет доказать, что число попарно непересекающихся бор-зоммерфельдовых циклов уровня k при $k \gg 0$ не превышает $\dim H^0(L^k)$, легко вычисляемой по формуле Римана – Роха.

Важно, что BPU-конструкция работает и для циклов

$$S \xrightarrow{\varphi} M_I,$$

являющихся *иммерсиями гладкого орбифолда*[10]. Таким образом, BPU-конструкция применима и к интересующей нас четверке (см. (3.31), (4.10)):

$$(\mathcal{M}^{\rm ss} , \Omega , \mathcal{O}(k\Theta) , A_{\rm CS}) ,$$

причем (см. предл. 3 из § 6 главы 3 и предшествующее ему на стр. 70 обсуждение) в этом случае существует канонический *геодезический* подъем бор-зоммерфельдовых циклов[11] до лежандровых, который мы подробно опишем в § 3 главы 9.

Поскольку векторное расслоение (3.47) пространств неабелевых волновых функций $\mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{M}_g^{\rm ss}$ над многообразием модулей римановых поверхностей вложено в тривиальное расслоение

[10] правда, для орбифолдов показатели асимптотик в (8.7), (8.8) несколько ухудшаются, но и этого вполне хватает для весьма впечатляющих геометрических выводов

[11] такой подъем (однозначный с точностью до конечного числа возможностей, выбор между которыми аналогичен фиксации ϑ-структуры) существует всегда, когда канонический класс K_{M_I} пропорционален $c_1(L^k) = k\,[\omega]$

$L^2(P) \times \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$, определен послойный проектор Сеге

$$L^2(P) \times \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{H} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{H}^k ,$$

а т. к. на расслоении $\mathcal{H}^k \longrightarrow \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$ имеется плоская проективная связность, пространство $\mathbb{P}\mathcal{H}_I^k$ локально не зависит от комплексной структуры I. Таким образом, возникает представление

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_g \xrightarrow{\varrho} \mathrm{Op}(L^2(P))$$

центрального расширения

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{M}}_g \longrightarrow \mathfrak{M}_g \longrightarrow 1$$

модулярной группы $\widetilde{\mathfrak{M}}_g$ в операторной алгебре $\mathrm{Op}(L^2(P))$ пространства функций, при котором центр $U(1) = \mathrm{Aut}(P) \subset \widetilde{\mathfrak{M}}_g$ действует на P как структурная группа этого главного расслоения. Действие элементов $g \in \widetilde{\mathfrak{M}}_g$ на проектор Сеге Π_I из (8.2) задает $U(1)$-эквивариантное линейное преобразование

$$p_{I,g(I)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pi_{g(I)} \circ \varrho(g) \circ \Pi_I \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_I) ,$$

изотипические компоненты которого относительно весового разложения

$$\mathrm{End}(\mathcal{H}_I) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{End} H^0(L^k)$$

индуцируют проективные представления

$$\mathbb{P}\left(\varrho_I^k\right) : \mathfrak{M}_g \longrightarrow \mathrm{Aut}\Big(\mathbb{P}\big(H^0(L^k)\big)\Big) .$$

§ 3 Геодезический подъем.

Фиксация ϑ-структуры позволяет исключить неоднозначность подъема (изначально определенного лишь с точностью до действия $U(1)$) бор-зоммерфельдовых циклов из M_I до лежандровых циклов на P, и тем самым, превратить линейно независимые проективные состояния $\mathrm{BPU}_k(S, \sqrt{\mu})$ (заданные с точностью до выбора фазы) в полноценный векторный базис пространства $H^0(M_I, L^k)$.

Для построения такого подъема рассмотрим ориентированную лагранжеву грассманизацию $\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^{\uparrow} = \mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^{\uparrow}(TM_I)$ касательного расслоения TM_I: в каждой точке $x \in M_I$ касательное пространство T_xM_I изоморфно $\mathbb{C}^n$ с фиксированными стандартными симплектической формой ω_x, евклидовой метрикой g_x и комплексной структурой I_x, и слой

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}x}^{\uparrow} = U(n)/\mathrm{SO}(n)$$

представляет собою грассманиан ориентированных лагранжевых подпространств в T_xM_I, ну а глобализация этой локальной картины дает относительное грассманово расслоение:

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^{\uparrow}(TM_I) \xrightarrow{\pi} M_I \quad \text{с} \quad \pi^{-1}(x) = (\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^{\uparrow})_x. \tag{8.9}$$

Локальные детерминанты: $U(n)/\mathrm{SO}(n) \xrightarrow{u \mapsto \det u} U(1) = S_x^1$ глобализуются в отображение

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}^{\uparrow}(TM_I) \xrightarrow{\det} S^1(-K)\ ,$$

где через $S^1(-K)$ обозначено главное $U(1)$-расслоение, ассоциированное с линейным расслоением

$$\Lambda^n TM_I = \det TM_I = \mathcal{O}(-K_{M_I})$$

(см. [71] и [72]).

Если в этой конструкции забыть про ориентацию, то мы получим (неориентированный) относительный лагранжев грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}(TM_I)$ и детерминантное отображение

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}(TM_I) \xrightarrow{\det} S^1(-K/2)\ . \tag{8.10}$$

Для любого лагранжева цикла $S \xrightarrow{\varphi} X$ имеется канонический гауссов подъем:

$$S \xrightarrow{G(\varphi)} \mathrm{Gr}_{\mathrm{L}}(TM_I)|_S \ ,$$

сопоставляющий $x \in S$ подпространство $T_xS \subset T_xM_I$, композиция которого с детерминантным отображением (8.10) задает лежандров цикл:

$$S \xrightarrow{\det \circ G(\varphi)} S^1(-K/2)|_S \tag{8.11}$$

в главном $U(1)$-расслоении, ассоциированном с $\mathcal{O}_{M_I}(-K/2)$. Рассмотрим теперь на линейном расслоении $\mathcal{O}_{M_I}(-K/2)$ эрмитову связность A_{LC}, индуцированную связностью Леви – Чивита келеровой метрики на M_I.

Определение 1. Лагранжев цикл S называется *почти геодезическим*, если его гауссов лежандров подъем (8.11) горизонтален относительно связности A_{LC}.

Замечание 1. Вообще говоря, предыдущие рассмотрения требуют фиксации на M метаплектической структуры и более аккуратного анализа с использованием индекса Маслова и т. п. Однако в нашем случае (см. ниже) эти проблемы решаются автоматически вследствие равенства $K_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}} = -4\Theta$!

Замечание 2. Другие примеры использования геодезического подъема лагранжевых циклов до лежандровых — в частности, в контексте зеркальной симметрии — имеются в [70], [71] и [72].

Вернемся теперь к нашим данным предквантования (4.10):

$$(\, \mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \,,\, \Omega \,,\, \mathcal{O}(k\Theta) \,,\, A_{\mathrm{CS}} \,) \ .$$

Согласно предл. 3 из § 6 главы 3 полуантиканоническое линейное расслоение в этом случае есть $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}(-K/2) = \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}(2\Theta)$ со связностью A_{LC}, индуцированной связностью предквантования A_{CS} на расслоении предквантования $L = \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}(\Theta)$. Мы получаем

Предложение 1. *Лагранжев цикл $S \subset \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ бор-зоммерфельдов тогда и только тогда, когда он почти геодезический.*

Далее, главные $U(1)$-расслоения, ассоциированные с L^* и с $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}(-K/2) = L^2$ связаны в нашем случае послойной квадратичной антиизогенией[1]:

$$S^1(L^*) \xrightarrow{\overline{\mu}_2} S^1(L^2) = S^1(-K/2)$$

(в частности, всякий «обычный» лежандров подъем (8.4) бор-зоммерфельдова цикла $S \subset \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ в $P = S^1(L^*)$ из § 2 главы 8 задает некоторый — не обязательно почти геодезический — гауссов лежандров цикл в $S^1(-K_S)$). Рассмотрим теперь для бор-зоммерфельдова цикла $S \xhookrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ уровня k коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} S^1(L^{k^*}) \arrow[r, "\overline{\mu}_2"] & S^1(L^{2k}) \\ S \arrow[u, hook, "\lambda"] \arrow[r, hook, "\det \circ G(\varphi)"] & S^1(L^2) \arrow[u, "\mu_k"'] \end{tikzcd} \tag{8.12}$$

где $S^1(L^2) \xrightarrow{\mu_k} S^1(L^{2k})$ — стандартная изогения степени k, а $S \xhookrightarrow{\lambda} S^1(L^{k^*})$ — обычный лежандров подъем бор-зоммерфельдова цикла $S \xhookrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ уровня k, задаваемый каким-либо горизонтальным унитарным сечением[2] $L^k|S$.

Определение 2. Бор-зоммерфельдов цикл $S \xhookrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ уровня k называется *почти геодезическим*, если диаграмма подъемов (8.12) коммутативна: $\mu_k \circ \det \circ G(\varphi)(S) = \overline{\mu}_2 \circ \lambda(S)$.

Напомним, что лежандровы циклы в $S^1(L^{k^*})$ образуют главное $U(1)$-расслоение[3] $\Lambda_k \longrightarrow \mathrm{BS}_k$ над пространством бор-зоммерфельдовых циклов уровня k, так что множество всевозможных почти геодезических подъемов доставляет многозначное сечение этого расслоения

$$\Lambda \supset \widetilde{\mathrm{BS}}_k \longrightarrow \mathrm{BS}_k$$

и является конечным циклическим накрытием над BS_k.

[1] т. е. двулистным накрытием с обращением ориентации
[2] см. (8.4) и обсуждение на стр. 154
[3] оно называется *расслоением Бэри* уровня k, см. [29]

Вернемся теперь к голдмановской вещественной поляризации

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\pi_\Gamma} \Delta$$

из § 2 главы 4. Для нее имеется конечное множество бор-зоммерфельдовых слоев, расположенных над точками

$$\mathfrak{S}_k = \Delta \cap \left(\frac{1}{2k}\mathbb{Z}\right) .$$

Определение 3. Фиксация почти геодезического подъема

$$\Lambda_w = \mu_k \circ \det \circ G(\varphi_w)(S_w) = \overline{\mu}_2 \circ \lambda(S_w) \subset S^1(L^{2k})$$

каждого бор-зоммерфельдова слоя $S_w \subset \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ вещественной поляризации π_Γ называется *выбором (неабелевой) ϑ-структуры* для этой поляризации.

На каждом бор-зоммерфельдовом слое вещественной поляризации можно каноническим образом выбрать полуформу. Для этого вспомним данное нами в предл. 3 из § 3 главы 4 описание бор-зоммерфельдовых слоев вещественной поляризации как однородных пространств G_e/G_v, где G_e, G_v есть группы (4.19). На группах $U(1)$ и $\mathrm{SU}(2)$ имеются двусторонне инвариантные полуформы $\sqrt{\mu}_1$ и $\sqrt{\mu}_2$, которые можно нормализовать так, чтобы произведение (см. след. 1 из § 3 главы 4):

$$\sqrt{\mu}_w = \left(\sqrt{\mu}_1(w)\right)^{t-s} \cdot \left(\sqrt{\mu}_2(w)\right)^{p+s} \tag{8.13}$$

было однородно степени 1 по отношению к растяжениям

$$\sqrt{\mu}_i(w) \longmapsto t \cdot \sqrt{\mu}_i(w) .$$

Назовем такую полуформу $\sqrt{\mu}_w$ на $\pi^{-1}(w)$ *однородно нормализованной*[4].

[4]легко видеть (см. [42, 4.7]), что однородно нормализованная полуформа единичного объема на неособом бор-зоммерфельдовом слое уровня k индуцируется гамильтоновым векторным полем, гамильтониан которого поднят с $\mathbb{R}^{3g-3}$

Итак, над каждой $\frac{1}{2k}$-целой точкой $w \in \Delta$ мы фиксируем почти геодезический лежандров подъем

$$\Lambda_w = \overline{\mu}_2 \circ \mu_\lambda(S) \subset S^1(L^{2k})$$

соответствующего бор-зоммерфельдова слоя $S \xhookrightarrow{\varphi_w} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ вещественной поляризации Голдмана и снабжаем его полуформой

$$\overline{\sqrt{\mu}}_w = (\mu_k \circ \det \circ G(\varphi_w))^* \sqrt{\mu}_w$$

(гауссовым подъемом канонической ковариантно постоянной нормализованной полуформы (8.13)). Теперь мы можем применить к этому полувзвешенному лежандрову циклу BPU-отображение из § 2 главы 8. Поскольку M_I почти однородно относительно торического действия Голдмана, описанного в § 1 главы 4, шварцево ядро BPU-отображения над внутренними точками многогранника Дельцана будет вести себя точно так же, как и в однородном случае, разобранном в [12, формулы (10–13)], и мы получаем окончательный результат нашего долгого путешествия[5]:

Теорема 1. *Подъем неабелевых ϑ-функциий*

$$\vartheta_w \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{BPU}_{k\Theta}\left(\Lambda_w, \overline{\sqrt{\mu}}_w\right) \quad c \quad w \in \Delta \cap \left(\frac{1}{2k}\,\mathbb{Z}\right) \tag{8.14}$$

на неабелево пространство Шоттки S_g вдоль канонического мероморфного отображения (3.14)*:*

$$S_g \xrightarrow{f|_{S_g}} \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma)$$

превращает их в набор голоморфных сечений (7.6)*:*

$$\left\{C^{(-i\Omega)}_{1/k}\left(\vartheta^{\Gamma_j}\right)\right\} \quad c \quad \Gamma_j \in \mathfrak{S}^k_\Gamma\,,$$

построенных нами в § 2 главы 7.

[5] с точностью до фазовых множителей (6.8) эта теорема очевидна из наших геометрических построений; может быть, фиксацию этих фазовых множителей следует (в духе RCFT) вносить прямо в определение неабелевой ϑ-структуры?

Итак, на каждом уровне k мы имеем башню из накрытий:

$$M_{k\Theta} \longrightarrow M_{\mathfrak{S}(k)} \longrightarrow M_{\Gamma_g} \longrightarrow \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}},$$

где $\mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}$ — многообразие модулей кривых рода g, M_{Γ_g} — многообразие модулей римановых поверхностей Σ_Γ, раскроенных на штаны, $M_{\mathfrak{S}(k)}$ — многообразие модулей римановых поверхностей Σ_{Γ_j} с фиксированной спинсеткой, а $M_{k\Theta}$ — многообразие модулей кривых с фиксированной ϑ-структурой, отвечающей полувзвешенному бор-зоммерфельдову слою проекции (4.11). Обозначим их композицию через

$$\varphi_{k\Theta} \,:\, M_{k\Theta} \longrightarrow \mathcal{M}_g^{\mathrm{ss}}\,. \tag{8.15}$$

Из совпадения связностей Хитчина, WZW и Коно вытекает

Теорема 2. *Подъем связности Хитчина на векторном расслоении пространств неабелевых волновых функций* (3.47) *относительно накрытия* (8.15) *задает эрмитову плоскую связность*[6] *на проективном расслоении*

$$\mathbb{P}\left(\varphi_{k\Theta}^{*}\mathcal{H}^k\right) = \mathbb{P}\left(\bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_k(\Gamma)} \mathcal{O}\cdot\vartheta_w\right)\,, \tag{8.16}$$

где через ϑ_w *обозначены* BPU$_k$*-образы* (8.14) *канонических геодезических подъемов*[7] *бор-зоммерфельдовых циклов* $\pi_\Gamma^{-1}(w)$, *отвечающих фиксированной* ϑ*-структуре.*

[6] ясно, однако, что соответствующая эрмитова структура на расслоении (8.16) не инвариантна относительно группы накрытия (8.15)
[7] см. § 3 главы 8

Глава 9.
ТОЧКИ МАКСИМАЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

§ 1 Предельные *м*-кривые.

Свести воедино все представленные выше конструкции позволяет редукция многообразия модулей $\mathcal{M}_g$ кривых рода g к некоторому точечному подмножеству, состоящему из специальных кривых, на которых все наши конструкции — как алгебро-геометрические, так и аналитические — прослеживаются и взаимодействуют максимально простым образом. Наличие согласованных проективно плоских связностей на всех наших расслоениях конформных блоков позволяет затем распространить результаты такого анализа и на произвольные кривые. И поскольку аналитическая версия двумерной конформной теории поля (см. [25]) предполагает продолжаемость всех геометрических объектов (в частности, расслоений конформных блоков) на компактификацию Делиня – Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$ многообразия модулей кривых, в качестве специальных кривых мы можем выбрать «максимально вырожденные» негладкие приводимые кривые. В этой главе мы описываем соответствующие им точки на $\overline{\mathcal{M}}_g$ и исследуем геометрию их деформаций[1], являющуюся математическим выражением обнаруженных физиками многочисленных соотношений между струнными теориями и конформными теориями поля в размерности $1+1$.

Напомним, что произвольный тривалентный граф Γ рода g определяет (гомотопически эквивалентное ему) трехмерное тело с ручками H_Γ, границей которого служит риманова поверхность

$$\Sigma_\Gamma = \partial H_\Gamma \ , \tag{9.1}$$

которую можно представлять себе как результат «накачивания» ребер графа Γ до «трубок»[2], а вершин — до «штанов» (т. е. сфер с тремя дырками), как на рис. 6, стр. 105. При этом набор из $(3g-3)$ попарно неизотопных окружностей, охватывающих горловины трубок, задает раскрой поверхности Σ_Γ на $(2g-2)$ штанов. Разумеется, такая поверхность еще не является алгебраической кривой, поскольку пока не наделена никакой комплексной структурой.

Однозначно извлечь из графа комплексную структуру, однако, тоже можно — это будет комплексная структура «максимально приводимой» алгебраической кривой P_Γ, распадающейся в объединение $(2g-2)$ прямых: римановых сфер $P_v = \mathbb{CP}^1$, отвечающих вершинам графа $v \in V(\Gamma)$, которые склеены друг с другом по тройкам точек $\{p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}\} \subset P_v$, отвечающих ребрам звезд $S(v) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Иначе говоря, мы стягиваем в точки все $(3g-3)$ окружности, по которым Σ_Γ разрезается на штаны. Получающаяся в результате связная приводимая кривая называется *предельной м-кривой*. Она имеет арифметический род g и лежит в самой

[1] эти точки похожи на максимально унипотентные особые точки многообразия модулей трехмерных многообразий Калаби – Яу, которые при зеркальной симметрии соответствуют предельным точкам, возникающим при бесконечном увеличении размеров многообразия; и хотя недостаток места не позволяет нам провести здесь полную параллель с зеркальной симметрией в контексте алгебраических кривых, мы, дабы подчеркнуть наличие такой параллели, будем называть наши вырожденные кривые *предельными м-кривыми*

[2] или *каналов*, если пользоваться терминологией квантовой конформной теории поля

глубокой компоненте $\bigcap_{i=0}^{g-1} D_i$ граничного дивизора[3]

$$D = \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g = D_0 \cup \bigcup_{i=1}^{g-1} D_i$$

компактифицированного по Делиню – Мамфорду многообразия модулей кривых рода g. Множество всех предельных *м*-кривых представляет собой конечную конфигурацию точек на границе $\overline{\mathcal{M}}_g$:

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\Gamma\}_{\Gamma \in \mathfrak{T}} \subset \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g \ , \tag{9.2}$$

занумерованных тривалентными графами.

§ 2 Канонические линейные системы.

Сечениями канонического линейного расслоения K_Γ предельной *м*-кривой P_Γ над каждой компонентой P_v являются мероморфные дифференциалы ω с простыми полюсами в точках склейки p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}, т. е.

$$K_\Gamma|_{P_v} = K_{P_v}(p_{e_1} + p_{e_2} + p_{e_3}) = \mathcal{O}_{P_1}(1) \ , \tag{9.3}$$

так что $c(K_\Gamma) = (1, 1, \ldots, 1)$ в решетке Нерона – Севери

$$\mathrm{NS}(P_\Gamma) = \prod_{v \in V(\Gamma)} \mathrm{Pic}(P_v) \ .$$

Глобальное голоморфное сечение $s \in H^0(P_\Gamma, K_\Gamma)$ представляется набором мероморфных дифференциалов ω_v на компонентах P_v с

[3]напомним, что общая точка дивизора D_0 является неприводимой кривой с ровно одним простым самопересечением, а общая точка на D_i — букетом гладких кривых рода i и $g - i$

простыми полюсами в точках склейки, вычеты которых удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{p_e}\omega_v + \mathrm{res}_{p_e}\omega_{v'} &= 0 \quad \forall\, e = [v, v'] \in E(\Gamma) \\ \mathrm{res}_{p_{e_1}}\omega_v + \mathrm{res}_{p_{e_2}}\omega_v + \mathrm{res}_{p_{e_3}}\omega_v &= 0 \quad \forall\, S(v) = \{e_1, e_2, e_3\}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Назовем *толщиной* графа Γ минимальное число $t(\Gamma)$ его ребер, после удаления которых граф становится несвязным. И. Артамкин в [7] доказал

Предложение 1. *Каноническая линейная система $|K_{P_\Gamma}|$ не имеет базисных точек тогда и только тогда, когда $t(\Gamma) \geq 2$, и очень обильна тогда и только тогда, когда $t(\Gamma) \geq 3$.*

Ниже мы для простоты ограничиваемся только случаем графов толщины ≥ 3, для которых каноническая линейная система $|K_{P_\Gamma}|$ задает вложение

$$P_\Gamma \xhookrightarrow{\phi_{K_\Gamma}} \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}\left(H^0(P_\Gamma, K_{P_\Gamma})^*\right) .$$

Повторяя классическое рассуждение Кастельнуово, мы получаем

Предложение 2. *Размерность полной линейной системы квадрик в $\mathbb{P}^{g-1}$, проходящих через каноническую кривую $\phi_{K_\Gamma}(P_\Gamma)$, равна*

$$\dim|2h - \phi_{K_\Gamma}(P_\Gamma)| = \dim|2h| - 3g + 3 . \tag{9.5}$$

Следствие 1. *$\overline{\mathcal{M}}_g$ является гладким орбифолдом в каждой точке $P_\Gamma \in \overline{\mathcal{M}}_g$, отвечающей предельной м-кривой, и слой кокасательного расслоения в такой точке*

$$T^*_{P_\Gamma}\overline{\mathcal{M}}_g = H^0\left(P_\Gamma, \mathcal{O}_{P_\Gamma}(2K_{P_\Gamma})\right) . \tag{9.6}$$

Рассмотрим теперь дважды каноническое отображение кривой P_Γ, задаваемое полной линейной системой $|2K_\Gamma|$:

$$P_\Gamma \xrightarrow{\phi_{2K_\Gamma}} \mathbb{P}^{3g-4} = |2K_\Gamma|^* = \mathbb{P}\left(T_{P_\Gamma}\overline{\mathcal{M}}_g\right) .$$

Образы простых двойных точек $\phi_{2K_\Gamma}(p_e)$ составляют при этом вложении конфигурацию из $(3g-3) = \dim H^0\left(P_\Gamma, \mathcal{O}(2K_{P_\Gamma})\right)$ линейно независимых точек, а компоненты кривой переходят в неприводимые коники, каждая из которых однозначно определяется любой тройкой лежащих на ней точек. В частности, конфигурация двойных точек задает разложение касательного пространства

$$T_{P_\Gamma}\overline{\mathcal{M}}_g = \bigoplus_{e \in E(\Gamma)} \mathbb{C}_e \ . \tag{9.7}$$

В следующем параграфе мы покажем, что каждое из этих базисных касательных направлений $\mathbb{C}_e$ интегрируется до рациональной кривой на $\overline{\mathcal{M}}_g$, откуда будет вытекать, что кривая P_Γ однозначно определяется непосредственно своим дважды каноническим образом, а не его орбитой по модулю действия проективных автоморфизмов $\mathbb{P}^{3g-4}$, как это происходит для общей алгебраической кривой.

§ 3 Специальные однопараметрические деформации предельных *м*-кривых.

Назовем *простым флагом* тривалентного графа Γ пару

$$(e \subset \Gamma) \ ,$$

где $e \in E(\Gamma)$ — любое ребро, не являющееся петлей, т. е. с $\partial e = v' \sqcup v''$, $v' \neq v''$. Будем называть *звездой* такого ребра

$$S(e) \overset{\text{def}}{=} \big(S(v') \cup S(v'')\big) \setminus \{e\} \ ,$$

т. е. если $S(v') = \{e, e_1', e_2'\}$, $S(v') = \{e, e_1'', e_2''\}$, то

$$S(e) = \{e_1', e_2', e_1'', e_2''\} \ .$$

Напомним (см. § 3 главы 6), что имеются 3 элементарные преобразования, стягивающие ребро e в новую 4-валентную вершину v_{new} с $S(v_{\mathrm{new}}) = S(e)$, а затем раздувающие ее в новое ребро

$$e_{\mathrm{new}} = [v'_{\mathrm{new}}, v''_{\mathrm{new}}]$$

в соответствии с тремя возможными разбиениями $S(v_{\mathrm{new}})$ на две пары ребер:

1) $S(v'_{\mathrm{new}}) = \{e_{\mathrm{new}}, e'_1, e'_2\}$, $S(v''_{\mathrm{new}}) = \{e_{\mathrm{new}}, e''_1, e''_2\}$;

2) $S(v'_{\mathrm{new}}) = \{e_{\mathrm{new}}, e'_1, e''_2\}$, $S(v''_{\mathrm{new}}) = \{e_{\mathrm{new}}, e''_1, e'_2\}$;

3) $S(v'_{\mathrm{new}}) = \{e_{\mathrm{new}}, e'_1, e''_1\}$, $S(v''_{\mathrm{new}}) = \{e_{\mathrm{new}}, e'_2, e''_2\}$.

Первое преобразование возвращает нас к исходному графу Γ, а два других приводят к новым графам Γ', Γ'' с выделенным ребром e_{new}. Будем называть тройку простых флагов

$$(e \subset \Gamma)\ , \quad (e_{\mathrm{new}} \subset \Gamma')\ , \quad (e_{\mathrm{new}} \subset \Gamma'') \tag{9.8}$$

гнездом флагов. Отметим, что гнездо однозначно определяется любым флагом, входящим в тройку, и имеется каноническое отождествление графов

$$\Gamma \setminus S(e) = \Gamma' \setminus S(e_{\mathrm{new}}) = \Gamma'' \setminus S(e_{\mathrm{new}})\ .$$

Замечание 1. Элементарное преобразование 1-петли e всегда приводит к тому же самому графу с той же петлей $e_{\mathrm{new}} = e$.

Рассмотрим теперь две компоненты $P_{v'}$, $P_{v''}$ кривой P_Γ, отвечающие вершинам исходного ребра $e = [v', v'']$. Вклеивая вместо $p_e = P_{v'} \cap P_{v''}$ трубку, мы получаем сферу $S^2 = \mathbb{P}^1$ с двумя парами отмеченных точек $(p_{e'_1}, p_{e'_2})$ и $(p_{e''_1}, p_{e''_2})$. Зафиксируем на ней комплексную структуру и рассмотрим двойное накрытие

$$E \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1 \tag{9.9}$$

с ветвлением в этих точках. Мы получаем эллиптическую кривую E с отмеченной точкой второго порядка

$$\sigma = p_{e'_1} + p_{e'_2} - p_{e''_1} - p_{e''_2}\ . \tag{9.10}$$

Таким образом, пространство модулей комплексных структур на S^2 без четырех точек совпадает с многообразием модулей $\mathcal{M}_1^2$ гладких эллиптических кривых с отмеченной точкой второго порядка. Варьируя эту комплексную структуру $\tau \in \mathcal{M}_1^2$ при неизменных комплексных структурах на всех остальных компонентах кривой P_Γ, мы получим однопараметрическое семейство стабильных алгебраических кривых $P^\tau_{e\subset\Gamma}$ и вложение

$$\mathcal{M}_1^2 \xhookrightarrow{\psi_{e,\Gamma}} \overline{\mathcal{M}}_g\ . \tag{9.11}$$

Как известно, $\mathcal{M}_1^2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\sigma, \sigma', \sigma''\}$ представляет собой проективную прямую без трех точек, которые как раз и соответствуют трем возможным разбиениям чеырех вершин $p_{e_1'}$, $p_{e_2'}$, $p_{e_1''}$, $p_{e_2''}$ на две пары, т. е. выбору на эллиптической кривой точки второго порядка, и отображение (9.11) продолжается до отображения

$$\begin{gathered} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\psi_{e,\Gamma}} \overline{\mathcal{M}}_g\ : \\ \sigma \longmapsto P_\Gamma\ , \quad \sigma' \longmapsto P_{\Gamma'}\ , \quad \sigma'' \longmapsto P_{\Gamma''}\ , \end{gathered} \tag{9.12}$$

отправляющего выколотые точки в предельные м-кривые, отвечающие трем описанным выше перестройкам графа Γ, образующим гнездо флагов (9.8). Мы доказали

Предложение 1. *Каждое касательное направление $\mathbb{C}_e$ из разложения* (9.7), *определяемое двойной точкой м-кривой P_Γ, интегрируется до проективной прямой* (9.12) *в пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_g$.*

Следствие 1. *Образ дважды канонического вложения однозначно восстанавливает кривую.*

Замечание 2. Если ребро e является 1-петлей с вершиной v, и $S(v) = \{e, e'\}$, то P_v будет рациональной кривой с одной отмеченной двойной точкой p_e и гладкой точкой $p_{e'}$. Заменяя двойную точку p_e на трубку, получаем гладкий тор T^2 с отмеченной точкой $p_{e'}$ и выделенной окружностью $a \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$, охватывающей вклеенную трубку и такой, что класс $a \pmod 2$ является точкой второго порядка на T^2. Пространство $\mathcal{M}_1^2$ комплексных структур на T^2 с таким набором жесткостей изоморфно $\mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, т. е. снова представляет собой $\mathbb{P}^1$ без трех точек, и рациональная кривая $\psi_{e,\Gamma}(\mathcal{M}_1^2)$ допускает в этом случае компактификацию двойной точкой, соответствующей P_Γ.

Итак, компактификация Делиня – Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_g$ содержит приводимую кривую

$$\mathcal{C} = \bigcup_{(e\subset\Gamma)} C_{e,\Gamma} \subset \overline{\mathcal{M}}_g\ , \tag{9.13}$$

компоненты которой $C_{e,\Gamma} = \psi_{e,\Gamma}(\mathbb{P}_1)$ нумеруются всевозможными флагами $(e \subset \Gamma)$. Мы видели, что для любого простого флага отображение $\psi_{e,\Gamma}$ является вложением, и соответствующая компонента $C_{e,\Gamma} \subset \mathcal{C}$ — гладкая рациональная кривая, пересекающая $\mathcal{P}$ ровно по трем точкам

$$C_{e,\Gamma} \cap \mathcal{P} = P_\Gamma + P_{\Gamma'} + P_{\Gamma''}\ ,$$

соответствующим гнезду $(\Gamma, \Gamma', \Gamma'')$ флага $(e \subset \Gamma)$, причем в каждой из них касательное пространство к $\overline{\mathcal{M}}_g$ имеет разложение (9.7). Отсюда сразу следует

Предложение 2. *Две различные компоненты C, C' кривой* (9.13) *либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально, и*

$$C \cap C' \in \mathcal{P}\ ,$$

причем множество $S(\Gamma)$ компонент, проходящих через данную точку $P_\Gamma \in \mathcal{P}$, нумеруется вершинами $e \in E(\Gamma)$.

Геометрия всех кривых семейства $C_{e,\Gamma}$ очень близка к геометрии предельных *м*-кривых. Рассмотрим на такой кривой точку $P_{E,\sigma}$, отвечающую приводимой кривой, одна компонента которой $P_{v',v''}$ является сферой с четырьмя выколотыми точками

$$p_{e'_1} \sqcup p_{e'_2} \sqcup p_{e''_1} \sqcup p_{e''_2} \tag{9.14}$$

(и соответствует эллиптической кривой (9.9) с точкой второго порядка (9.10)), а остальные $(2g-4)$ компоненты P_v с $v \neq v'$, v'' остаются теми же трехдырочными сферами, что и в P_Γ (так что всего имеется $3g-1$ простых двойных точек).

Сечения канонического обратимого пучка $K_{P_{E,\sigma}}$ над каждой старой компонентой P_v, как и выше, являются мероморфными дифференциалами ω с простыми полюсами в p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3}, а над новой компонентой — мероморфными дифференциалами с простыми полюсами в точках (9.14), так что канонический класс имеет в группе Нерона – Севери $\mathrm{NS}_{P_{E,\sigma}}$ тип (2, 1, ... , 1) (первая координата соответствует эллиптической компоненте).

Глобальные голоморфные сечения $s \in H^0\left(P_{E,\sigma}, K_{P_{E,\sigma}}\right)$ задаются набором из $(3g-4)$ мероморфных дифференциалов ω_v и еще одним дифференциалом $\omega_{v,v'}$, которые имеют в выколотых точках вычеты, связанные теми же ограничениями (9.4), что и для *м*-кривых.

Каноническое отображение $P_{E,\sigma} \xrightarrow{\phi_K} \mathbb{P}^{g-1}$ переводит все компоненты P_v в прямые, а $P_{v',v''}$ — в конику. Размерность пространства квадратичных дифференциалов на $P_{E,\sigma}$ равна $(3g-3)$, так что $\overline{\mathcal{M}}_g$ является гладким орбифолдом в точке $P_{E,\sigma}$, а дважды каноническое отображение

$$P_{E,\sigma} \xrightarrow{\phi_{2K}} \mathbb{P}^{3g-4} = \mathbb{P}\left(T_{P_{E,\sigma}}\overline{\mathcal{M}}_g\right) = \left|2\,K_{P_{E,\sigma}}\right|^*$$

является вложением, причем над образами двойных точек кривой $P_{E,\sigma}$ мы, как и выше, будем иметь каноническое разложение (9.7) касательного пространства к $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Следовательно, образы простых двойных точек кривых $P_{E,\sigma}$ задают разложение

$$T\overline{\mathcal{M}}_g\big|_{C_{e,\Gamma}} = TC_{e,\Gamma} \oplus \bigoplus_{e'\in E(\Gamma)\setminus\{e\}} L_{e'}$$

касательного расслоения к $\overline{\mathcal{M}}_g$ над каждой компонентой $C_{e,\Gamma} = \psi_{e,\Gamma}(\mathbb{P}_1)$ кривой (9.13). Линейные слагаемые $L_{e'}$ этого разложения, образованные одномерными составляющими разложения (9.7) — это тавтологические линейные расслоения $\mathcal{O}_{C_{e,\Gamma}}(-1)$, так что

$$T\overline{\mathcal{M}}_g\big|_{C_{e,\Gamma}} = \mathcal{O}_{C_{e,\Gamma}}(2) \oplus \mathcal{O}_{C_{e,\Gamma}}(-1)^{\oplus(3g-4)}\,, \qquad (9.15)$$

и в частности, ограничение на $C_{e,\Gamma}$ канонического класса пространства модулей имеет вид

$$K_{\overline{\mathcal{M}}_g}\Big|_{C_{e,\Gamma}} = \mathcal{O}_{C_{e,\Gamma}}(3g-6)\,.$$

§ 4 Специальная двупараметрическая деформация предельных $\mathcal{M}$-кривых.

Рассмотрим теперь на графе Γ флаг $(v \subset e \subset \Gamma)$ длины 3, в котором $e \in S(v)$, и пусть $S(v) \setminus \{e\} = \{e_1\} \sqcup \{e_2\}$, где $\partial e_i = v \sqcup v_i$. Стягивая эти ребра e_1, e_2, получаем новый граф Γ_{new} с новой пятивалентной вершиной v_{new}, звезда которой будет естественно разбита на ребро e и две пары ребер, пришедших из $S(v_1) \setminus \{e_1\}$ и $S(v_2) \setminus \{e_2\}$. Теперь дважды раздуем v_{new} обратно, вклеивая новые ребра e_1', e_2' с $\partial e_1' = v_{\mathrm{new}} \sqcup v_1^{\mathrm{new}}$, $\partial e_2' = v_{\mathrm{new}} \sqcup v_2^{\mathrm{new}}$ и распределяя между ними ребра звезды $S(v_{\mathrm{new}})$ в соответствии с каким-либо новым ее разбиением вида $5 = 1 + 2 + 2$. Мы получим новый флаг

$$(v' \subset e' \subset \Gamma') \tag{9.16}$$

длины 3 с $v' = v_{\mathrm{new}}$ и $e' = S(v_{\mathrm{new}}) \setminus (S(v_1^{\mathrm{new}}) \cup S(v_2^{\mathrm{new}}))$. Всего имеется 15 таких перестроек, отвечающих 15 разбиениям

$$S(v_{\mathrm{new}}) = \{e'\} \sqcup \left(S(v_1^{\mathrm{new}}) \setminus \{e_1'\}\right) \sqcup \left(S(v_2^{\mathrm{new}}) \setminus \{e_2'\}\right) \ ,$$

которые организуются в 5 троек с общим e. Возникающее в результате этих 15 перестроек множество из 15 флагов $(v' \subset e' \subset \Gamma')$ длины 3 мы будем называть *гнездом флагов длины 3*.

Специализацией этой конструкции является стягивание лишь одной вершины, например, e_1. При этом возникнет четырехвалентная вершина v_{new} с $S(v_{\mathrm{new}}) = \{e, e_2, e_3, e_4\}$, где $\{e_3\} \sqcup \{e_4\} = S(v_1) \setminus \{e_1\}$, а $\{e\} \sqcup \{e_2\} = S(v) \setminus \{e_1\}$. Заменяя e любым ребром из пары $\{e_3, e_4\}$, скажем, ребром e_3, и раздувая вершину v_{new} до нового ребра e' с $\partial e' = v' \sqcup v''$ и $S(v') = \{e', e, e_3\}$, $S(v'') = \{e', e_2, e_4\}$, мы получаем новый флаг $(v' \subset e' \subset \Gamma')$ длины 3 из того же гнезда (9.16) флагов длины 3, что и исходный флаг $(v \subset e \subset \Gamma)$. При этом простые флаги $(e_1 \subset \Gamma)$ и $(e' \subset \Gamma')$ лежат в одном гнезде (9.8) простых флагов

$$(e_1 \subset \Gamma)\,,\ (e' \subset \Gamma')\,,\ (e'' \subset \Gamma'')\ , \tag{9.17}$$

третий элемент которого получается заменой в предыдущей конструкции ребра e на ребро e_4.

На геометрическом языке флагу $(v \subset e \subset \Gamma)$ длины 3 соответствует $\mathcal{M}$-кривая P_Γ с выделенными неприводимыми компонентами: P_v и P_{v_1}, P_{v_2}, приклеенными к P_v по точкам $p_{e_1}, p_{e_2} \in P_v$. Заменяя эти две двойные точки трубками, мы получаем сферу с пятью выколотыми точками, одна из которых — p_e — пришла с P_v, а две пары оставшихся — с P_{v_1} и P_{v_2}. Многообразие модулей комплексных структур на такой сфере представляет собою рациональную аффинную поверхность

$$\overset{\circ}{S}_{v,e,\Gamma} = \frac{\mathbb{P}^1 \times S^2(S^2\mathbb{P}^1)}{\mathbb{P}\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})}\ , \tag{9.18}$$

и поскольку каждая сфера с пятью выколотыми точками однозначно продолжается до приводимой кривой рода g подходящими подклейками $(3g-5)$ прямых по трем точкам, мы имеем вложение

$$\overset{\circ}{S}_{v,e,\Gamma} \xhookrightarrow{\psi_{v,e,\Gamma}} \overline{\mathcal{M}}_g\ ,$$

образ которого компактифицируется до замкнутой поверхности

$$S_{v,e,\Gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\psi_{v,e,\Gamma}\left(\overset{\circ}{S}_{v,e,\Gamma}\right)} \subset \overline{\mathcal{M}}_g \tag{9.19}$$

пятнадцатикомпонентным дивизором

$$S_{v,e,\Gamma} \setminus \psi_{v,e,\Gamma}\big(\overset{\circ}{S}_{v,e,\Gamma}\big) = \bigcup_{\nu=1}^{15} C_\nu\ , \tag{9.20}$$

составленным из компонент кривой $\mathcal{C}$ из (9.13), которые отвечают гнездам простых флагов (9.17) и нумеруются элементами гнезда (9.16) флагов длины 3.

В результате на $\overline{\mathcal{M}}_g$ возникает приводимая рациональная поверхность

$$\mathcal{S} = \bigcup_{(v \subset e \subset \Gamma)} S_{v,e,\Gamma} \subset \overline{\mathcal{M}}_g\ , \tag{9.21}$$

компоненты (9.19) которой нумеруются всевозможными флагами $(v \subset e \subset \Gamma)$ длины 3. Каждая компонента $S_{v,e,\Gamma}$ пересекается с локусом м-кривых $\mathcal{P}$ по 15-компонентной кривой (9.20), и поскольку ограничение касательного расслоения $T\overline{\mathcal{M}}_g$ на каждую из этих компонент имеет вид (9.15), мы немедленно получаем

Предложение 1. *Две различные компоненты S, S' поверхности* (9.21) *либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально вдоль некоторого набора компонент кривой* (9.20).

Стабильная кривая P_s, отвечающая общей точке $s \in \mathcal{S}$ поверхности (9.21), отличается от предельной м-кривой тем, что склеивается из $(3g-5)$ трехдырочных сфер и оной пятидырочной сферы. В частности, ее канонический класс[1] имеет тип $c(K_{P_s}) = (3, 1, \dots, 1)$ в группе Нерона – Севери, а каноническая модель

$$P_s \xrightarrow{\phi_K} \mathbb{P}^{g-1}$$

представляет собою конфигурацию из прямых и кубики. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_g$ имеет в каждой точке P_s структуру гладкого орбифолда, и дважды каноническое вложение

$$P_s \xhookrightarrow{\phi_{2K}} \mathbb{P}^{3g-4} = \mathbb{P}\left(T_s\overline{\mathcal{M}}_g\right) = |2K_{P_s}|^*$$

переводит простые двойные точки кривой P_s в базис касательного пространства $T_s\overline{\mathcal{M}}_g$, что, как и выше, приводит к разложению

$$T\overline{\mathcal{M}}_g\big|_{S_{v,e,\Gamma}} = TS_{v,e,\Gamma} \oplus \bigoplus_{e \in E(\Gamma)\setminus\{e_1,e_2\}} L_e\,, \qquad (9.22)$$

причем линейные расслоения L_e ограничиваются в соответствующие компоненты разложений (9.15) и (9.7).

[1] а канонический пучок такой кривой локально свободен и описывается дословно так же, как и в двух предыдущих случаях

§ 5 Модулярная конфигурация.

Пространства модулей (9.11) и (9.18), возникавшие в предыдущих двух параграфах, являются частными случаями следующей общей конструкции. Любой граф Γ с вершинами произвольной валентности ≥ 3 определяет приводимую кривую

$$P_\Gamma = \bigcup_{v \in V(\Gamma)} P_v \, ,$$

каждая компонента которой $P_v = \mathbb{P}^1$ трансверсально пересекает компоненты $P_{v'}$ с $v \cup v' = \partial e$, где $e \in S(v)$, по $|S(v)|$ точкам $p_e \in P_v$. Если в графе есть хоть одна более чем трехвалентная вершина, у такой кривой возникают модули $\mathcal{M}_\Gamma$, задающие положение $|S(v)|$ точек на компоненте P_v и зависящие от комбинаторики множества тривалентных расширений $\mathcal{E}(\Gamma)$ исходного графа (см. § 3 главы 6).

Например, если Γ получается из тривалентного графа $\Gamma_{\max}$ стягиванием одного ребра, то $\mathcal{M}_\Gamma = \mathcal{M}_1^2$ является тройным накрытием многообразия модулей гладких эллиптических кривых, а для графов с одной пятивалентной вершиной $\mathcal{M}_\Gamma$ представляет собою рациональную поверхность (9.18).

Каждое такое многообразие модулей $\mathcal{M}_\Gamma$ вкладывается в $\mathcal{M}_g$ и, следовательно, может быть компактифицировано в нем по Делиню – Мамфорду, так что

$$\overline{\mathcal{M}}_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma \cup \bigcup_{\Gamma' > \Gamma} \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma'} \quad \subset \quad \overline{\mathcal{M}}_g \, ,$$

где графы Γ' являются раздутиями Γ. Очевидно, что максимально возможная размерность такого многообразия модулей равна $(2g-3)$,

$$\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma'} \cap \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma''} = \bigcup_{\Gamma > \Gamma', \Gamma''} \mathcal{M}_\Gamma,$$

и ограничение касательного расслоения $T\overline{\mathcal{M}}_g$ на каждую компоненту $\mathcal{M}_\Gamma$ допускает разложение, подобное (9.22) и (9.15).

§ 6 $\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)$ и модули расслоений на *м*-кривых.

Многообразие модулей векторных расслоений кривой с простыми двойными точками не компактно, но может быть компактифицировано пучками без кручения, не локально свободными только в особых точках. Эта компактификация очень близка к той, которую в работе [6] построил для алгебраических поверхностей И. В. Артамкин.

А именно, любой пучок без кручения F на P_Γ включается в точную последовательность

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow F^{**} \longrightarrow C(F) \longrightarrow 0\,,$$

в которой $\mathrm{Supp}C(F) \subset \bigcup\limits_{e\in E(\Gamma)} p_e$, а F^{**} поднимает нормализацию кривой до векторного расслоения, так что $|\mathrm{Supp}F| = c_2(F)$ измеряет отклонение пучка F от локально свободного. Класс $c_2(F) = 0$ тогда и только тогда, когда F локально свободен, т. е. поднимается до векторного расслоения на нормализации кривой. Мы называем такое расслоение E *топологически тривиальным*, если тривиальны все его ограничения $E|_{P_v}$, что означает, что $E|_{P_v} = \oplus\mathcal{O}_{P_v}$, поскольку $\mathbb{P}_v = \mathbb{P}_1\ \forall\, v\in V(\Gamma)$.

Ниже мы описываем многообразия модулей $\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)$ топологически тривиальных линейных расслоений и $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{vb}}(P_\Gamma)$ полустабильных векторных расслоений ранга 2, а также их компактификации

$$J(P_\Gamma) = \overline{\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma) = \overline{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}}_{[}\mathrm{vb}](P_\Gamma)$$

пучками без кручения F, для которых расслоение F^{**} является элементом соответствующего открытого пространства модулей.

Для описания линейного расслоения L на P_Γ рассмотрим набор L_0 каких-либо его тривиализаций $\mathcal{O}_{P_v}$ над всеми компонентами P_v. При этом слои тривиализаций $\mathcal{O}_{P_v}$, $\mathcal{O}_{P_{v'}}$ над точкой

$$p(e) \in P_v \cap P_{v'}\ , \quad e \in E(\Gamma)\,,\ \partial e = v \cup v'$$

отождествляются при помощи умножения на некоторую ненулевую константу $a(\overrightarrow{e}) \in \mathbb{C}^*$, которая преобразуется обращающей стрелки инволюцией:

$$i^*_{\downarrow\uparrow} a = a(\overleftarrow{e}) = a^{-1}(\overrightarrow{e})$$

(ср. с (6.34)). Таким образом, набор тривиализаций L_0 индуцирует отображение

$$\overrightarrow{E}(\Gamma) \xrightarrow{a} \mathbb{C}^* , \tag{9.23}$$

а изменение тривиализаций задается функцией

$$V(\Gamma) \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} \mathbb{C}^* ,$$

действующей на a по формуле

$$\widetilde{\lambda} a(\overrightarrow{e}) = \widetilde{\lambda}(v_s) \cdot a(\overrightarrow{e}) \cdot \widetilde{\lambda}^{-1}(v_t) ,$$

где v_s и v_t есть начало и конец ориентированного ребра $\overrightarrow{e}$ (как на стр. 126). Таким образом (см. § 6 главы 6), пространство всех тривиализаций топологически тривиального линейного расслоения над P_Γ есть не что иное, как пространство $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ плоских $\mathbb{C}^*$-связностей на графе Γ, а группа $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ замен тривиализаций — это комплексификация унитарной абелевой калибровочной группы из (6.35), так что

$$\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma) = \mathcal{A}_\mathbb{C}/\mathcal{G}_\mathbb{C} = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Gamma), \mathbb{C}^*) = S^a_g$$

совпадает с абелевым пространством Шоттки (2.23).

Аналогично, векторное расслоение E ранга 2 на P_Γ задается набором E_0 своих тривиализаций $E|_{P_v} \simeq \mathcal{O}_{P_v} \oplus \mathcal{O}_{P_v}$, который индуцирует набор изоморфизмов $a(\overrightarrow{e}) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, отождествляющих их слои над точками склейки сфер и удовлетворяющих стандартным соотношениям (6.24), т. е. плоскую $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-связность

$$\overrightarrow{E}(\Gamma) \xrightarrow{a} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) ,$$

а смены тривиализаций:

$$V(\Gamma) \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \tag{9.24}$$

составляют калибровочную группу этой связности и действуют на a по правилу

$$\widetilde{g}a(\overrightarrow{e}) = \widetilde{g}(v_s) \circ a(\overrightarrow{e}) \circ \widetilde{g}^{-1}(v_t)$$

(ср. с (6.25)). Поэтому в терминах § 5 главы 6

$$\mathcal{M}_{\mathrm{vb}}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}/\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{RC}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) = S_g \ , \tag{9.25}$$

где $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ — пространство плоских $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-связностей, $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ — комплексная калибровочная группа, а S_g — неабелево комплексное пространство Шоттки из § 2 главы 3.

Рассмотрим теперь трехмерное утолщение графа Γ — тело с ручками (9.1). В точной последовательности фундаментальных групп

$$1 \longrightarrow \pi_1(H_\Gamma) \longrightarrow \pi_1(\Sigma_\Gamma) \longrightarrow \pi_1(\Gamma) \longrightarrow 1$$

ядро и коядро являются свободными группами F_g с g образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_g \in \pi_1(H_\Gamma) \ , \qquad b_1, b_2, \ldots, b_g \in \pi_1(\Gamma) \ ,$$

из которых можно составить стандартное представление:

$$\pi_1(\Sigma_\Gamma) = \left\langle \ a_1, a_2, \ldots, a_g \ , \ b_1, b_2, \ldots, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle ,$$

позволяющее отождествить пространство комплексных структур на Σ_Γ с пространством Тейхмюллера τ_g.

Фиксация на Σ_Γ комплексной структуры I позволяет, как мы знаем, рассматривать пространство

$$\mathfrak{RC}(\pi_1(\Gamma), \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) = S_g$$

как семейство плоских векторных расслоений на Σ_Γ, что дает мероморфное отображение (3.12):

$$S_g \xrightarrow{f_I} \mathcal{M}_{\mathrm{vb}}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I) \ ,$$

и мы можем рассмотреть универсальное семейство таких отображений

$$S_g \times \tau_g \xrightarrow{F} \mathcal{M} \ , \tag{9.26}$$

где справа стоит универсальное семейство $\mathcal{M} \xrightarrow{u} \tau_g$ многообразий модулей векторных расслоений[1].

Нетрудно видеть, что специализация универсального отображения (9.26) в содержащийся в компактификации пространства $\mathcal{M}$, индуцированной компактификацией Делиня – Мамфорда пространства τ_g, слой $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma) = \overline{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{vb}}(P_\Gamma)}$ над предельной м-кривой P_Γ совпадает со стандартным вложением

$$S_g = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma) \xrightarrow{F_{P_\Gamma}} \overline{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma)}\ ,$$

только что описанным выше. Из этого немедленно получается[2] упоминавшееся на стр. 57 частичное решение проблемы Нарасимана:

Предложение 1. *Образ мероморфного отображения* (3.14)*:*

$$S_g \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma)$$

плотен по Зарисскому для общей гладкой алгебраической кривой Σ_I рода g.

Доказательство. Утверждение верно для м-кривых $P_\Gamma \in \mathcal{M}_g$ и устойчиво к малым шевелениям в $\mathcal{M}_g$. □

Такой ход мысли представляется весьма продуктивным даже и в классическом абелевом случае (см. § 4 главы 2): вложение

$$(\mathbb{C}^*)^g = S_g^a \xrightarrow{F} \overline{\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)}$$

является пределом накрытий $(\mathbb{C}^*)^g \xrightarrow{f_I} J(\Sigma_I)$ (см. (2.23)- (2.25)), и стоит посмотреть, как ведут себя при этом предельном переходе классические (абелевы) ϑ-функции (2.26) (скажем, δ-функции (2.18) были обнаружены именно таким образом!). Более того, вся классическая теория ϑ-функций может быть построена применением к $\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)$ преобразования когерентных состояний из § 3 главы 2, а затем продолжена на любую гладкую кривую при

[1] $u^{-1}(I) = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(\Sigma_I)$

[2] я благодарю Герда Детлоффа за предложенное им упрощение моего первоначального рассуждения

помощи голоморфной плоской связности, описанной Велтерсом в [78].

Именно такой подход мы и использовали в неабелевом случае: преобразования когерентных состояний из главы 7 позволяют интерпретировать все сказанное в главе 6 как теорию неабелевых ϑ-функций на $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma)$, которая затем разносится на произвольные гладкие кривые посредством проективно плоской связности Хитчина, — бор-зоммерфельдово квантование и геометрия лагранжевых и лежандровых циклов позволяют обойти проблемы, связанные с мероморфностью забывающего отображения (3.14). При этом мы существенно используем существование алгебро-геометрической компактификации пространства векторных расслоений над предельными *м*-кривыми. Опишем ее теперь более подробно.

§ 7 Алгебраическая геометрия ϑ-функций предельных *м*-кривых.

Оба пространства $\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)$ и $\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma)$ являются аффинными многообразиями, допускающими канонические компактификации пучками без кручения.

В абелевом случае мы будем называть такую компактификацию *якобианом*

$$J(P_\Gamma) = \overline{\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)}$$

предельной *м*-кривой. Пучок без кручения F ранга 1 задается, как и в (9.23) выше, функцией a, но только теперь со значениями не в группе $\mathbb{C}^*$, а в ее пополнении $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}^* \cup \{0, \infty\}$ — римановой сфере с двумя отмеченными точками (или фиксированным стандартным действием $\mathbb{C}^*$). Поэтому

$$J(P_\Gamma) = \frac{\left(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}^*}\right)^{3g-3}}{\mathcal{G}_{\mathbb{C}^*}} ,$$

и его граница $D_\Gamma = J(P_\Gamma)\setminus \mathrm{Pic}_0(\Gamma) = \bigcup\limits_{e\in E(\Gamma)} (D_+(e)\cup D_-(e))$ является объединением $6g-6$ дивизоров

$$D_+(e) = \{a \mid a(\overrightarrow{e}) = 0\}\ , \quad D_-(e) = \{a \mid a(\overrightarrow{e}) = \infty\}$$

(так что $D_+(e)\cup D_-(e) = \{F \mid p_e \in \mathrm{Sing}\, F\}$).

Всякая абелева спинсетка Γ_w на графе Γ, заданная весовой функцией w (6.32), удовлетворяющей условиям (6.33), определяет на $J(P_\Gamma)$ главный дивизор

$$D_w = \sum w(e)\cdot D_{\mathrm{sgn}\,(w(e))}\ ,$$

который является пределом обычных ϑ-функций гладких кривых, и значит, должен быть дивизором рациональной функции ϑ_w, регулярной всюду на $\mathrm{Pic}_0(P_\Gamma)$. Если вес w имеет уровень k, мы можем зафиксировать один ее полюс так, чтобы сделать все $w(e)$ неотрицательными и, тем самым, получить канонический базис из ϑ-функций с характеристиками.

Аналогично абелевому случаю, каждый пучок без кручения $F\in\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma)$ ранга 2 задается функцией

$$\overrightarrow{E}(\Gamma) \xrightarrow{\ a\ } \overline{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} = \widetilde{\mathbb{P}^3}\ , \mathbb{P}\left(\ End(\mathbb{C}^2)\right)$$

где $\widetilde{\mathbb{P}^3}$ есть двойное накрытие $\widetilde{\mathbb{P}^3} = \mathbb{P}\left(\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)\right)$, разветвленное над детерминантной квадрикой Сегре [1] $Q\subset\mathbb{P}_3$, так что

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma) = \overline{\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}{}_{[}\mathrm{vb}](P_\Gamma)} = \widetilde{\mathbb{P}^3}^{E(\Gamma)}/\,\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$$

с той же самой калибровочной группой (9.24), что и в (9.25). Таким образом, граница $D = \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_\Gamma)\setminus\mathcal{M}^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{vb}}(P_\Gamma)$ является объединением $(3g-3)$ дивизоров

$$D = \bigcup_{e\in E(\Gamma)} D(e)\ .$$

[1]эту стандартную компактификацию $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ можно также описать как сечение квадрики Плюккера $\mathrm{Gr}(2,4)\subset\mathbb{P}_5$ плоскостью, задаваемой в плюккеровых координатах уравнением $p_{12} = p_{34}$

Изображенное на рис. 8 на стр. 113 элементарное преобразование тривалентного графа Γ рода g, стирающее какое-нибудь его ребро e вместе с двумя его вершинами, превращает Γ в новый граф Γ_e рода $g-1$ и действует на дивизоры $D(e)$ по правилу

$$D(e) = Q_e \times \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}(P_{\Gamma_e}) \ .$$

Дивизор $\Theta_w = \sum\limits_{e \in E(\Gamma)} w(e) \cdot D(e)$, построенный по произвольной спинсетке Γ_w уровня 1, является пределом эффективных неабелевых ϑ-дивизоров гладких кривых, и набор

$$\bigcup_{w \in \mathfrak{S}^1_\Gamma} \Theta_w$$

всех таких дивизоров доставляет базис Мамфорда (2.3) для предельной *м*-кривой P_Γ.

Фиксируя какую-либо спинсетку $w_0 \in W^1(\Gamma)$ уровня 1, мы немедленно получаем на каждом уровне k дивизор $k\Theta_{w_0}$, и набор эффективных дивизоров

$$\bigcup_{w \in \mathfrak{S}^k_\Gamma} \text{н.о.к.}\,(k\Theta_{w_0}, \Theta_w)$$

из полной линейной системы $|k\Theta_{w_0}|$ дает бор-зоммерфельдов базис (4.15) в пространстве волновых функций голдмановской вещественной поляризации уровня k предельной *м*-кривой P_Γ. Можно проверить, что его ограничение на uS_g, будучи продолжено на гладкие кривые с помощью плоской связности Хитчина, даст в точности бор-зоммерфельдовы базисы пространств неабелевых ϑ-функций, построенные нами в главе 8 при помощи BPU-метода.

Литература

[1] *Atiyah M. Reflections on Geometry and Physics.* p. 423

[2] *Atiyah M. Complex analytic connections in fibre bundles.* Trans.Amer. Math. Soc., 85, 1957, 181-207.

[3] *Atiyah M. The path integral formulation.* Oxford seminar on Jones – Witten theory, Michaelmas Term 1988. Seminar 6, p. 106.

[4] *Atiyah M. and Bott R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, 1982, 523-615.

[5] *Andersen J. E. Asymptotic faithfulness of quantum $SU(n)$ representations of the mapping class groups.* preptint `QA/0204084`.

[6] *Артамкин И. В. О деформациях пучков без кручения на алгебраической поверхности.* Изв. АН СССР, Сер. Мат., 1989, № 6

[7] *Artamkin I. V. Canonical maps of pointed nodal curves.* MPI preprint 2003–37, гот. к публ. в Изв. РАН, Сер. Мат.

[8] *Baker H. Abel's theorem and the allied theory including the theory of theta functions.* Cambridge Univ. Press, 1897.

[9] *Beauville A. Vector Bundles on Curves and Generalized Theta Functions: Recent Results and Open Problems.* Complex Algebraic Geometry, MSRI Publications, vol.28, 1995, 17-33.

[10] *Bolker E. D., V. Guillemin V., Holm T. S. How is a graph like a manifold?* preprint `CO/0206103`.

[11] *Beauville A. and Laszlo Y. Conformal blocks and Generalized Theta Functions.* Commun.Math. Phys. 164, 1994, 385–419.

[12] *Borthwick D., Paul T. and Uribe A. Legendrian distributions with applications to the non-vanishing of Poincaré series of large weight.* Invent. math, **122** (1995), 359–402 or hep-th/9406036

[13] *Bertram A. Moduli of rank 2 vector bundles, theta divisors and the geometry of curves in projective space.* J. Diff. Geom., 35, 1992, 429–469.

[14] *Bradlow S., Daskalopoulos G. Moduli of stable pair for holomorphic bundles over Riemann surfaces.* Int. J. Math., 2, 1991, 477–513.

[15] *Coble A. Algebraic geometry and theta functions.* AMS Coll. Publ. 10, Providence, R. I., 1929 (3 ed., 1969).

[16] *Cox D. and Katz S. Mirror symmetry and Algebraic Geometry.* AMS, Math. Surveys and Monographs, v. 68, 1999.

[17] *Danilov V., Shokurov V., Shafarevich I. Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes.* Encyclopedia of math. scinces. v. 23, Springer, 1998.

[18] *Delzant T. Hamiltonians periodiques et images convexed de l'application moment.* Bull. Soc. Math. France, 116, 1988, 315-339.

[19] *Donaldson S. Gluing techniques in the cohomology of moduli spaces.* in Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991, Publish or Perish, Houston, TX, 1993, 137–170.

[20] *Drinfeld V. and Simpson C. B-structures on G-bundles and local triviality.* Math. Res.-Letters, 2, 1995, 823-829.

[21] *Dubrovin B., Krichever I. and Novikov S. Integrable systems I.* Encycl. Math. Sci., v. 4, Dynamical systems IV, Springer-Berlin, 1990, 173-280.

[22] *Fay J. Theta functions and Riemann surfaces.* LNM, v. 352, Springer-Verlag, 1973.

[23] *Fay J. Kernel Functions, Analytic Torsion and Moduli Spaces.* AMS, Memoirs, v. 98, 464, 1992.

[24] *Fay J. The Non-Abelian Szego Kernel and Theta-Diviser.* Contemporary Mathematics, v. 136, 1992, 171-183.

[25] *Frieden D. and Shenker S. The analytic geometry of two-dimensional conformal field thory.* Nuccl. Phys. B 281, 1987, 509.

[26] *Florentino C., Mourao J., Nunes J. Analytical aspects of the theory abelian theta functions.* Preprint 3/2001, February 2001, IST, Lisboa.

[27] *Florentino C., Mourao J., Nunes J., Tyurin A. Analytical aspects of the theory non-Abelian theta functions.* Preprint IST, Lisboa, 2000.

[28] *Griffits Ph, Harris J. Principles of Algebraic Geometry.* Wiley-Interscience, New York, 1978

[29] *Городенцев А., Тюрин А. АЛАГ.* Изв. РАН Сер. Мат. **65**, № 3, (2001), 15–50; English transl. in Russian Acad. Sci. Izv. Math.**65**:3 (2001), available as Max-Planck-Institute fur Mathematik, Preprint Series 1999 (130). 1-34.

[30] *Guillemin V. Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces.* Birkhauser (Progress in Mathematics 122), 1994.

[31] *Guillemin V. Symplectic spinors and partial differential equations.* Coll. Inter. C.N.R.S., Aix-en-Provence, 1974 (1975), 217–252

[32] *Guillemin V. and Sternberg S. Geometric asymptotics.* Mathematical surveys, Vol.14, Providence, RI: AMS, 1977.

[33] *Guillemin V. and Sternberg S. The Gelfand-Cetlin System and Quantization of the Complex Flag Manifolds.* Journal of func. analysis, 52, 1983, 106-128. Compos. Math., 49, 173-194.

[34] *Goldman W. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces.* Adv. in Math. **54** (1984) 200–225

[35] *Goldman W. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations.* Invent. Math., 85, 1986, 263-302.

[36] *Hall B.C. The Segal-Bargmann coherent state transform for compact Lie groups.* J. Funct. Anal. **122** (1994), 103–151.

[37] *Hatcher A. and Thurston W. A presentation for the mapping class group of closed oriented surface.* Topology **19** (3), 1980, 221–237.

[38] *Hitchin N. Flat connections and Geometrical Quantization.* Commun. Math. Phys. 131, 1990, 347–380.

[39] *Hitchin N. Stable bundles and integral systems.* Duke Math. J. v. 54 № 1, 1987, 91–114.

[40] *Hitchin N., Sawon J. Curvature and characteristic numbers of hyper-Kähler manifolds* preprint `math.DG/9908114`

[41] *Jeffrey L. C. and Weitsman J. Bohr – Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula* Commun. Math. Phys. **150** (1992), 593–630

[42] *Jeffrey L. C. and Weitsman J. Half density quantization of the moduli space of flat connections and Witten's semiclassical invariants* Topology **32** (1993), 509–529

[43] *Kohno T. Topological invariants for 3-manifolds using representation of mapping class group I* Topology **31** 1992, 203-230.

[44] *Kohno T. Topological invariants for 3-manifolds using representation of mapping class group II. Estimation tunnel number of knots* Commentary mathematics 175, 1994, 193-217.

[45] *Knijnik V., Zamolodchikov A. Current algebra and Wess – Zumino model in two dimensions* Nucl. Phys. B 247, 1984, 83.

[46] *Kirillov A., Reshetikhin N. Representation of the algebra $U_q(sl(2,\mathbb{C}))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links.* Infinite dimensional Lie algebras and groups. World Scientific, 1988, 285–342.

[47] *Laszlo Yves. Hitchin's and WZW connections are the same.* J. Differential Geometry, 49, 1998, 547-576.

[48] *Moore G. and Seiberg N. Classical and quantum conformal field theory.* Commun. Math. Phys. 123, 1989, 177-254.

[49] *Mumford D. Tata lectures on theta.* I: Progr. Math **28**, Birkhäuser (1983). II: Jacobian theta functions and differential equations«: Progr. Math **43**, Birkhäuser (1984). III: Progr. Math **97**, Birkhäuser (1991)

[50] *Margalit D. The Automorphisms Group of the Complex of Pant Decompositions* preprint `QT/0201319`.

[51] *Masur H., Minsky Y. Geometry of the complex of curves I. Hyperbolicity.* Invent. Math., 138 (1), 1999, 103–149.

[52] *Mulase M., Penkava M. Ribbon graphs, quadratic differentials on Riemann surfaces and algebraic curves defined over $\overline{\mathbb{Q}}$.* electronic prprint `math-ph/9811024`.

[53] *Mulase M. Lectures on the asymptotic expansion of a Hermitian matrix integral.* preprint `math-ph/9811023`.

[54] *Newlender A. and Nirenberg L.* Ann. of Math. 65 (1957), 391-404.

[55] *Newstead P.E. Characteristic classes of stable bundles over an algebraic curve.* Trans. Am. Math. Soc., 169, 1972, 337-345.

[56] *Narasimhan M. and Ramanan R. Deformations of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve.* Ann. of Math., v. 101, 1975, 391–417.

[57] *Penrose R. . An approach to combinatorial space-time* In Quantum Theory and Beyond, ed. T. Bastin, Cambridge Univ. press, 1971, 151-180.

[58] *Rovelli C. and Smolin L. Spin Networks and Quantum Gravity.* preptint `gr-qu/9505006`.

[59] *Rawnslay J. Coherent States And Kähler Manifolds.* Qart. J. of Maths. 28, 1997, 404–415.

[60] *Ramadas T. R., Singer L. M. and Weitsman J. Some comments on Chern–Simons gauge theory.* Commun. Math. Phys. **126** (1989) 409–420

[61] *Reid M. What is a flip?.* Preprint Uta, 1993.

[62] *Seshadri C.S. Desingurisation des varieties de modules de fibres semistables.* Asterisque, 98, 1982, 110–130.

[63] *Sorger C. La formula de Verlinde.* Sem. Bourbaki, 794, 1994.

[64] *Schlichenmaier M. Sugawara construction for higher genus Riemann surfaces.* Mannheimer Manuskripte, 231, 1998, 1-19, QA/9806032.

[65] *Singer J. Three dimensional manifolds and their Heegaard diagrams.* Trans. Am. Math. Soc., 35, 1933, 88-111.

[66] *Thaddeus M. Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles.* J. Diff. Geom., 35, 1992, 131–149

[67] *Thaddeus M. Stable pairs, linear system and the Verlinde formula.* Invent. Math., 117, 1994, 317–353.

[68] *Tsuchiya A., Ueno K. and Yamada Y. Conformal field theory on iniversal family of stable curves with gauge symmetries.* Adv. Stud. Pure Math. 19, 1989, 459-566.

[69] *Tsuchiya A. and Kanie, Vertex operators in conformal field on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representation of braid group.* Advanced Studies in Pure Math. 16, 1988, 297-372, (Errata) ibid. 19, 1990, 675-682.

[70] *Тюрин А. Геометрия модулей векторных расслоений.* УМН, 29:6 (1974), 59–88. English transl. in Russian Math. Surveys 29:6 (1974), 57–88.

[71] *Тюрин А. Алгебро-геометрические аспекты гладкости. 1. Полиномы Дональдсона.* УМН, 44:3 (1989), 93–143; English transl. in Russian Math. Surveys 44:3 (1989), 117–178.

[72] *Tyurin A. Six lectures on four manifolds.* Lect. Notes in Math., 1646, 186-246.

[73] *Тюрин А. Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии (GQP и зеркальная симметрия).* Изв. РАН, Серия мат., т. 64 № 2 (2000), 141–224; English transl. in Russian Acad. Sci. Izv. Math. 64:2 (2000), 363-437.
math.AG/9806006, 1-45.

[74] *Tyurin A. Three mathematical faces of* SU(2)*-spin networks.*
math.DG/0011035, 1-20. Preprint 35/2000, IST, Lisboa., available as math.AG/9909084;

[75] *Тюрин А. О базисах Бора–Зоммерфельда.* Изв. РАН, Серия мат., т. 64 № 5 (2000), 163–196; English transl. in Russian Acad. Sci. Izv. Math. 64:5 (2000), 1033–1064. available as math.AG/9909084.

[76] *Tyurin A. Complexification of Bohr-Sommerfeld conditions.* Preprint series, Inst. of Math of university of Oslo, **15**, 1999, 1–32.

[77] *Тюрин А. Модели Дельцана пространств модулей.* AG/0105216, Изв. РАН, Серия мат. т. 65 № 3 (2002)

[78] *Welters G. Polarized abelian varieties and the heat euqation.* Compos. Math., 49, 173-194.

[79] *Wajnryb B. A simple presentation for the mapping class group.* Israel J. Math. 45. 1983, 157-174.

[80] *Weil A. Generalization des functions abeliennes.* J. de Math. P. et Appl.,17,no.9,1938, 47-87.

[81] *Wirtinger W. Untersuchengen uber Thetafunctionen.* Teubner, Leipzig, 1895

Список иллюстраций.

А. Н. Тюрин

Квантование,
классическая и квантовая
теории поля
и тэта-функции

перевод с английского: *Н. А. Тюрин*
научное редактирование и верстка: *А. Л. Городенцев*
иллюстрации: *Н. А. Городенцева* (по эскизам автора)

LaTeX-2_ε (руссификация Шеня – Львовского)
с пакетом `diagrams` П. Тэйлора